

Ivadas	5
Kaip linksmi ir efektyviai mokytis iš šio vadovėlio?	6
1 skyrius Trigonometrija	8
Kliūčių ruožą įveiksi – sėkmę prišauksi!	9
Pakartok. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos	10
Susipažink	19
1. To paties argumento (kampų) trigonometrinių formulės	19
2. Trigonometrinių funkcijų redukcijos taisyklė	23
Išmok	28
1. Dviejų kampų sumos ir skirtumo kosinusas	28
2. Dviejų kampų sumos ir skirtumo sinusas	31
3. Dviejų kampų sumos ir skirtumo tangentas	33
Taikyk	38
1. Paprasčiausių trigonometrinių lygčių ir nelygybių sprendimas	38
2. Trigonometrinių lygčių sprendimo būdai	42
3. Pavojai, tykantys sprendžiant trigonometrines lygtis	46
Pasitikrink	54
Ar priimsi iššūkį?	56
Prarastos trigonometrinių funkcijos	57
2 skyrius Funkcijos išvestinė ir jos taikymas	58
Kaip viskas juda ir keičiasi?	59
Pakartok. Funkcijos ir jų savybės	60
Susipažink	75
1. Funkcijos riba taške	75
2. Funkcijos pokytis	76
3. Materialiojo taško judėjimo greitis	77
4. Funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientas	79
5. Funkcijos išvestinės apibrėžtis	80
6. Funkcijos išvestinės mechaninė prasmė	81
7. Funkcijos išvestinės geometrinė prasmė	82
Išmok	88
1. Pagrindinės diferencijavimo taisyklės	88
2. Pagrindinės diferencijavimo formulės	89
3. Sudėtinės funkcijos išvestinė	93
Taikyk	100
1. Materialiojo taško judėjimo greitis	100
2. Funkcijos grafiko liestinė	101
3. Funkcijos monotoniškumo intervalai	103
4. Funkcijos kritiniai taškai	104
5. Funkcijos tyrimas ir jos grafiko braižymas	107
6. Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmė	109
7. Optimizavimo uždaviniai	110
Pasitikrink	121
Ar priimsi iššūkį?	124
Kaip matematika padeda gelbėti mišką?	125

3 skyrius | Pirmąjė funkcija ir integralas 126

Integralai	127
Pakartok. Skaičiai ir skaičiavimai, reiškiniai	128
Susipažink	134
1. Pirmąjė funkcija	134
2. Apibrėžtinis integralas	140
Išmok	145
1. Pirmąjų funkcijų lentelė	145
2. Sudėtinės funkcijos $y = f(kx + b)$ pirmąjė funkcija	147
Taikyk	151
1. Kūno nueitas kelias, greitis, pagreitis ir pirmąjė funkcija	151
2. Kreivinė trapecija ir jos plotas	152
Pasitikrink	164
Ar priimsi iššūkį?	166
Sukinio tūrio radimas	167

4 skyrius | Vektoriai erdvėje 168

Vektoriai ir kompiuterinė grafika	169
Pakartok. Planimetrija	170
Susipažink	185
1. Svarbiausios sąvokos	185
2. Vektorių veiksmams	187
3. Skalarinė vektorių sandauga. Vektorių statmenumo sąlyga	189
4. Vektorių kolinearumo sąlyga	190
Išmok	194
1. Stačiakampė erdvės koordinačių sistema	194
2. Erdvės vektorių koordinatės	196
3. Vektoriaus ilgis ir skalarinė vektorių sandauga	198
Taikyk	201
Pasitikrink	203
Ar priimsi iššūkį?	206
Vektorinis laukas	207

Informacinė medžiaga 208

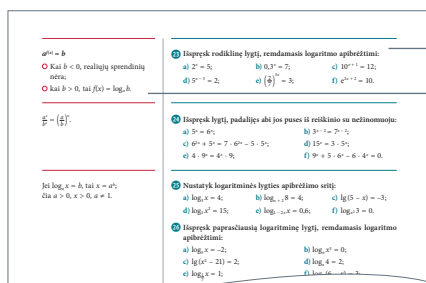
Trigonometrija	208
Funkcijos išvestinė ir jos taikymas	212
Pirmąjė funkcija ir integralas	215
Vektoriai erdvėje	217

Kaip linksmi ir efektyviai mokytis iš šio vadovėlio?

Šio vadovėlio struktūra panaši į XI klasės vadovėlio struktūrą, todėl tau jau pažįstami pagrindiniai žymenys, žinomos spalvų reikšmės. Priminsime juos ir supažindinsime su naujienomis.

PAKARTOK

Šie skyreliai suteiks tau puikią galimybę pakartoti kiekvieną žemesniųjų klasių matematikos kurso temą.



- Dešinėje puslapio pusėje – kartojimo uždaviniai.
- Kairėje pusėje išdėstyti faktai, formulės, taisyklės primins reikiamas žinias ir padės išspręsti uždavinius.
- Skyreliuose „Pakartok“ ir „Pasitikrink“ vyrauja žalia spalva.

SUSIPAŽINK

Skyrelyje „Susipažink“ rasi apibrėžtas ir paaiškintas visas pagrindines einamos temos sąvokas, reikiamus žymenis. Šis skyrelis – tolesnių žinių ir įgūdžių pamatas.

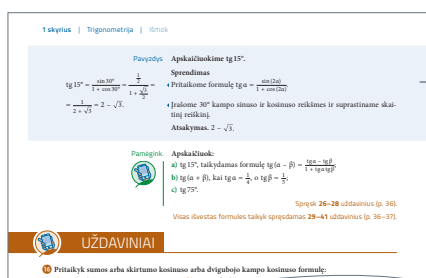
IŠMOK

Dar niekas neišmoko matematikos spoksodamas į lentą ar knygą. Reikia spręsti uždavinius. Skyrelis „Išmok“ papildys tavo žinias ir padės tau susiformuoti pagrindinių, tipinių uždavinių sprendimo įgūdžius.

TAIKYK

Išnagrinėjęs skyrelį „Išmok“ jau turėsi nemažai žinių, mokėsi spręsti daugybę uždavinių. Metas šias žinias ir įgūdžius pritaikyti sudėtingesnėse situacijose, žvelgti giliau, mąstyti plačiau. Tam ir skiriamas skyrelis „Taikyk“.

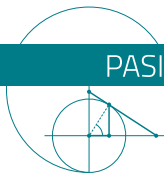
- Mėlyna yra skyrelių „Susipažink“, „Išmok“ ir „Taikyk“ spalva.



- Šių skyrelių pavyzdžiai pateikiami melsvame fone. Taip juos lengviau rasi.
- Perskaityk kairįjį stulpelį – pavyzdžio sprendimą.
- Jei ko nors nesupratai, skaityk dešinįjį stulpelį – detalesnius paaiškinimus.

UŽDAVINIAI

PASITIKRINK



AR PRIIMSIS IŠŠŪKĮ?

INFORMACINĖ MEDŽIAGA



Prisimink!

Kai $y = f(u)$ ir $u = g(x)$, tai $y = f(g(x))$ – sudėtinė funkcija.

Įsimink!

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Atkreipk dėmesį!

- ☐ $A_n^0 = 1$,
- ☐ $A_n^n = n!$.

Pamėgink.



- Uždaviniai išskirti rusva spalva.

Ko išmokai šiame skyriuje? Artėja kontrolinis darbas ir mokytojas tavo žinias vertins pažymiu. Gali tam darbui puikiai pasirengti. Tereikia išspręsti skyrelio „Pasitikrink“ uždavinius.

Iššūkis – kvietimas susirungti. Kas nugalės? Uždavinys tave ar tu uždavinį?

Pasėdėti keletą dienų prie vieno sunkesnio uždavinio, bandyti vis naujus sprendimo būdus, ieškoti, klysti ir vėl pradėti iš naujo yra kur kas naudingiau, nei išspręsti 100 paprastų standartinių uždavinių. Ar tavo akyse žybsi ugnelės, ar priimsi iššūkį?

Daugumą tau reikalingų faktų ir taisyklių rasi vadovėlio gale esančioje informacinėje medžiagoje. Nepamiršk, kad kartais verta žvilgtelėti ir į XI klasės vadovėlio gale pateiktą informacinę medžiagą. XI–XII klasės matematikos vadovėlių keturių dalių informacinė medžiaga apima visą vidurinės mokyklos matematikos kursą.

Taip žymimi faktai, kuriuos žinotai, tačiau galbūt primiršai. O čia jų staiga prireikė.

Tai nauji, tau dar nežinomi faktai. Juos reikėtų įsiminti, nes jų tikrai prireiks.

Taip žymimi svarbūs faktai, padedantys suprasti įvairias formules ir taisykles, atsakyti į klausimą „Kodėl?“

Šis ženkliukas rodo, kad elektroniniame priede rasi ne tik užduočių atsakymus, bet ir sprendimus su paaiškinimais. Pirmiausia pamėgink išspręsti pats, o jei nepavyks...

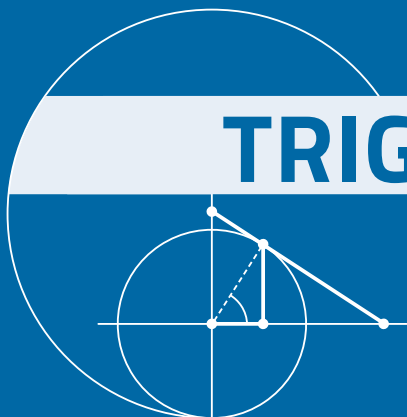
Šis ženkliukas rodo, kad verta dirstelėti į vadovėlio elektroninį priedą. Jame rasi svarbių ir įdomių dalykų:

- ☐ jei ženkliukas yra šalia teoremos, rasi jos įrodymą;
- ☐ jei ženkliukas šalia pavyzdžių ar užduočių, rasi vadovėlyje neapartų uždavinių, teoremų, taisyklių...
- ☐ jei ženkliukas prie teorinių tekstų, rasi papildomos informacijos apie aptariamų matematinių faktų istoriją, įvairių įdomybių.

Šio vadovėlio elektroninio priedo ieškok virtualioje mokymo(si) aplinkoje **klase.eduka.lt**.

1 SKYRIUS

TRIGONOMETRIJA



FUNKCIJOS IŠVESTINĖ IR JOS TAIKYMAS

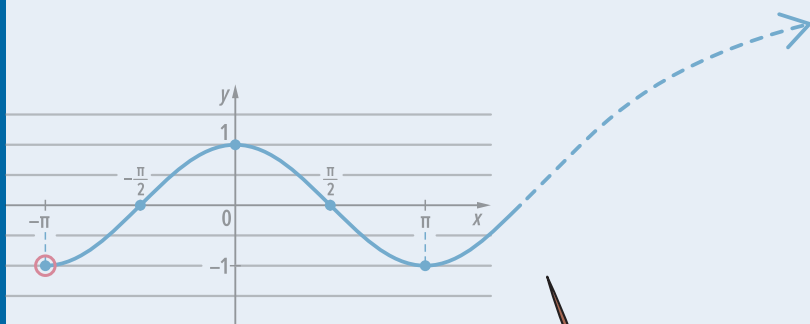
PIRMYKŠTĖ FUNKCIJA IR INTEGRALAS

VEKTORIAI ERDVĖJE

STEREOMETRIJA

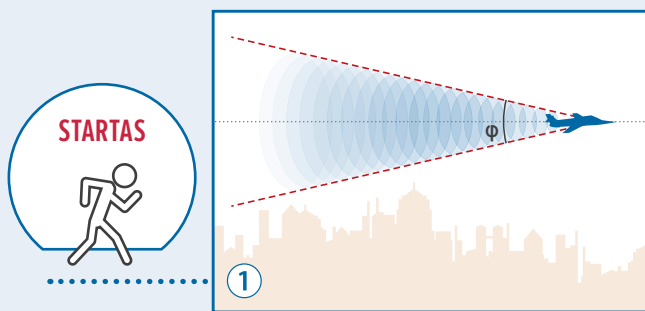
STOCHASTIKA

KURSO KARTOJIMAS

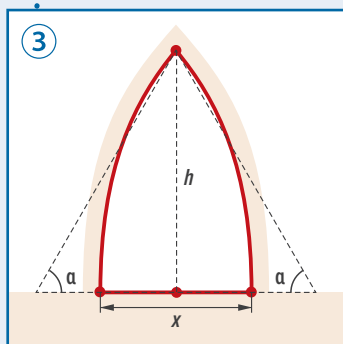
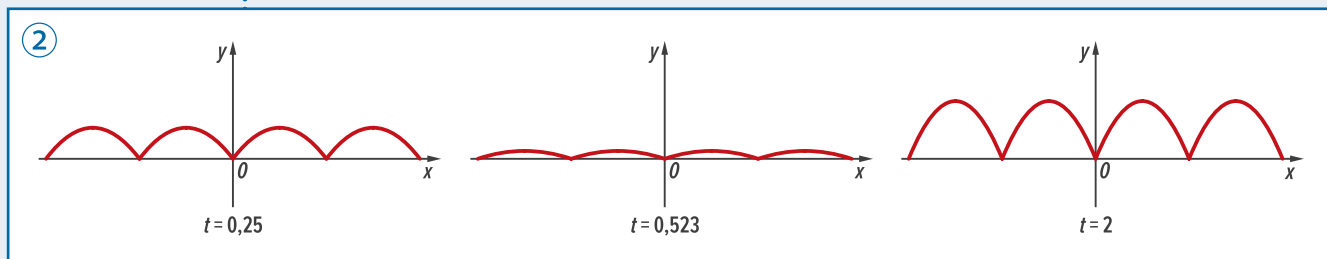


Kliūčių ruožą įveiksi – sėkmę prišauksi!

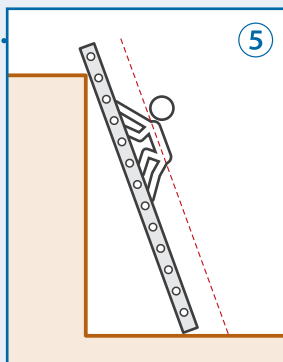
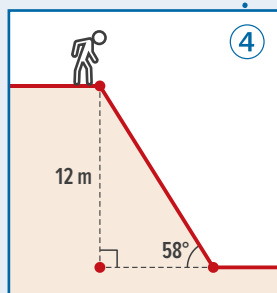
Įveik šią trasą ir drauge pasitikrink, ar esi pasirengęs mokytis toliau.



- 1 Norėdamas pasiekti tikslą, turi sėsti į viršgarsinį lėktuvą. Kai lėktuvo greitis viršys garso greitį, garso bangos susilies į vieną smūginę bangą, vadinamą Mācho kūgiu. Macho kūgio kampą φ ir Macho skaičių M (nedimensinį dydį, rodantį objekto greičio ir garso greičio santykį) sieja ryšys $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{M}$. Apskaičiuok kampo φ reikšmę 1° tikslumu, jei Macho skaičius lygus 4,5.

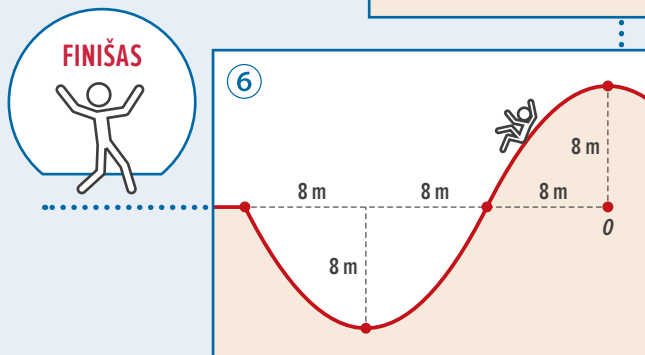


- 2 Lėktuvas turi įveikti viską naikinančią bangą. Ją apibūdina funkcija $y = \left| 3 \sin \left(\frac{\pi}{5} x \right) \cos(3t) \right|$ (čia y – bangos aukštis kilometrais, x – taško, kuriame kirsti bangą, abscisė kilometrais, $x \in (0; 6)$, t – laiko, kai kirsti bangą, momentas, $t \in (0; 3)$). Šią bangą galima įveikti tik tuo laiko momentu, kai bangavimas beveik nuslopsta, t. y. kai $t = 0,523$. Nustatyk, kokio didžiausio aukščio tuo momentu gali būti banga. Jei pavėluosi ir bangą bandysi kirsti momentu $t = 2$, turėsi tai padaryti tokiaime taške, kuriame banga mažiausia. Kokia šio taško abscisė?



- 3 Skrendi pro arką. Jos plotį x ir aukštį h sieja ryšys $x = \frac{2h \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$. Koks gali būti didžiausias arkos aukštis, jei kampo α didumas lygus 60° , o arkos plotis turi būti ne didesnis kaip 12 m?

- 4 Skrydis baigtas, toliau keliausi pėsčiomis. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuok, kokio ilgio nuokalnę teks įveikti.



- 5 Lipdamas kopėčiomis žemyn turėsi pasilenkti. Jėga, veikianti tavo nugarą, kai lenkiesi, nusakoma funkcija $F = \frac{1,2m \cos \alpha}{\sin 12^\circ}$; čia m – tavo masė kilogramais. Kokiu kampu pasilenkus ši jėga yra didžiausia, kokiu – mažiausia?

- 6 Ar esi pasirengęs įveikti kalnelius? Tašką O laikydamas koordinatinių pradžių tašku, parašyk kosinusoidės lygtį.

Lygtys, nelygybės ir jų sistemos

Prisimink!

Išspręsti lygtį – tai rasti visas nežinomojo reikšmes, su kuriomis lygtis virsta teisinga skaitine lygybe, arba įrodyti, kad tokių reikšmių nėra.

	Reiškinys	Apibrėžimo sritis
①	sveikasis	$x \in \mathbf{R}$
②	$\frac{\triangle}{\bigcirc}$	$\bigcirc \neq 0$
③	$\sqrt[n]{\bigcirc}$	$\bigcirc \geq 0$
④	$\frac{\triangle}{\sqrt[n]{\bigcirc}}$	$\bigcirc > 0$
⑤	$\bigcirc^{\frac{m}{n}}$	$\bigcirc > 0$
⑥	$\log_{\square} \triangle$	$\begin{cases} \triangle > 0, \\ \square > 0, \\ \square \neq 1 \end{cases}$

Uždaviniai

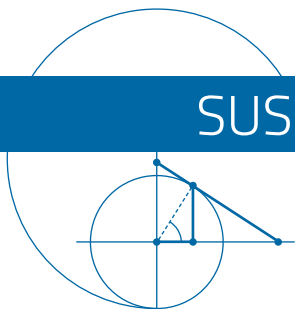
- Lygties $6x - 5 = 6x$ sprendinių aibė yra:
A $\mathbf{R} \setminus \{0\}$; B $\emptyset$; C $\mathbf{R}$; D $\{0\}$.
- Nurodyk lygties $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$ sprendinių aibę.
A $\{0\}$ B $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ C $\emptyset$ D $\mathbf{R}$
- Kiek sprendinių turi lygtis $\frac{(x-1)(x-6)}{x(x-1)} = 0$?
A 1 B 2 C 3 D 4
- Lygties $\sqrt{x-3} = 2$ sprendinys yra:
A -1; B 1; C 5; D 7.
- Kiek sprendinių turi lygtis $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = -4$?
A 0 B 1 C 2 D Be galo daug
- Nurodyk lygties $|x + 6| = 5$ sprendinius.
A -11 B -1 C -11 ir -1 D Sprendinių nėra

7 Nustatyk lygties apibrėžimo sritį:

- | | | |
|-------------------------------|--|-------------------------------|
| a) $\frac{x^2-4}{x+2} = 5$; | b) $\frac{x+2}{x^2-4} = 5$; | c) $3\sqrt{x+6} = 1$; |
| d) $3^x = 9$; | e) $x^8 = 1$; | f) $\lg(1-x) = 0$; |
| g) $\frac{3x+7}{x^2+1} = 3$; | h) $7^{3+x} = 7$; | i) $\sqrt[3]{5-2x} = 8$; |
| j) $x^{\frac{2}{3}} = 5$; | k) $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = 1$; | l) $\log_x x^2 = 1$; |
| m) $\sqrt{x^2} = 2$; | n) $\sqrt{\lg x} = 2$; | o) $\log_2 \frac{1}{x} = 3$; |
| p) $\sqrt[4]{1-x^2} = 5$; | r) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 4$; | s) $\log_x(1+x) = 3$. |

8 Išspręsk lygtį:

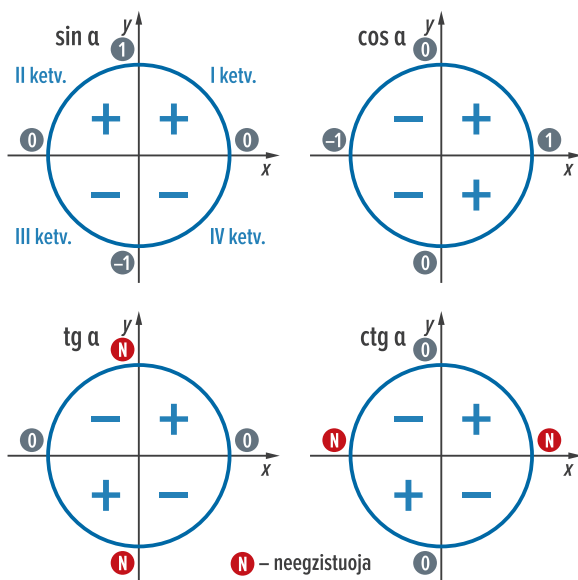
- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $x - 1 = x + 2$; | b) $3(x - 1) - 5(x + 2) = -13 - 2x$; |
| c) $\sqrt{3}x = 2$; | d) $3x = x^2$; |
| e) $x^2 - x(x + 3) = 6$; | f) $2x^2 = 3$; |
| g) $\sqrt{2}x - 1 = x$; | h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$; |
| i) $2 + x = x$; | j) $6(x - 1) = 9x - 3(x + 2)$; |
| k) $6x^2 = 1$; | l) $x(x + 3) = x^2 + 6$; |
| m) $\sqrt{3} = \sqrt{2}x$; | n) $5x = x^2$; |
| o) $3 - x = \sqrt{3}x$; | p) $2x - \sqrt{5} = x\sqrt{5} + 2$. |



XI klasėje susipažinai su trigonometrinėmis funkcijomis $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ir išmokai taikyti jų savybes. Mes tas pratęsti šią pažintį, sužinoti daugiau trigonometrinių formulių ir mokyti jas taikyti.

Pradedant mokyti toliau, verta prisiminti kai kurias žinomas formules ir taisykles:

Trigonometrinių funkcijų reikšmių ženklai



Trigonometrinės formulės

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Trigonometrinių funkcijų lygnumas

- $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(-x) = \cos x$;
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
- $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

1. To paties argumento (kampų) trigonometrinės formulės

Sprendžiant uždavinius dažnai reikia rasti vienos trigonometrinės funkcijos reikšmę, kai yra žinoma to paties kampo kitos trigonometrinės funkcijos reikšmė, prastinti sudėtingesnius trigonometrinius reiškinius. Todėl svarbu žinoti formules, siejančias vieną trigonometrinę funkciją su kita. Kai kurias iš šių formulių jau žinai. Svarbiausia tarp jų – pagrindinė trigonometrijos tapatybė $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Pavyzdys Apskaičiuokime:

- a) $\cos \alpha$, kai $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ir $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
 b) $\sin \alpha$ ir $\operatorname{tg} \alpha$, kai $\cos \alpha = -0,4$ ir $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Sprendimas

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$,
 $\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$;
 $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, nes $\alpha \in \text{I ketv.}$

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$,
 $\sin^2 \alpha = 1 - (-0,4)^2 = 1 - 0,16 = 0,84$,
 $\sin \alpha = \pm \sqrt{0,84} = \pm \frac{2\sqrt{21}}{10}$,
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, nes $\alpha \in \text{II ketv.}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-0,4} = \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) =$
 $= -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

- ♦ Taikome pagrindinę trigonometrijos tapatybę.
- ♦ Iš jos išreiškiame $\cos^2 \alpha$.
- ♦ Įrašome kampo α sinuso reikšmę ir apskaičiuojame kosinuso kvadratą.
- ♦ Iš abiejų lygties pusių ištraukę kvadratinę šaknį, gauname dvi kosinuso reikšmes – teigiamąją ir neigiamąją.
- ♦ Pastebime, kad pagal sąlygą kampas α priklauso I ketvirčiui ($\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$), todėl kosinuso reikšmė yra teigiama.
- ♦ Taikome pagrindinę trigonometrijos tapatybę.
- ♦ Iš jos išreiškiame $\sin^2 \alpha$.
- ♦ Įrašome kampo α kosinuso reikšmę ir apskaičiuojame sinuso kvadratą.
- ♦ Ištraukę kvadratinę šaknį, gauname dvi sinuso reikšmes.
- ♦ Pastebime, kad kampas α priklauso II ketvirčiui, todėl sinuso reikšmė yra teigiama.
- ♦ Apskaičiuojame kampo α tangentą, žinodami, kad jis lygus sinuso ir kosinuso santykiui.

Atsakymas. a) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

I Pamėgink.



Apskaičiuok $\cos \alpha$ ir $\operatorname{tg} \alpha$, kai $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ir $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Spręsk 1–2 uždavinius (p. 25).

Pavyzdys

Suprastinkime reiškinį $3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 5$.

Sprendimas

$3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 5 =$
 $= 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 5 =$
 $= 3 \cdot 1 - 5 = -2$.

- ♦ Iškeliamė prieš skliaustus pirmųjų dviejų narių bendrąjį daugiklį 3.
 - ♦ Skliaustuose pastebime reiškinį $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ir, remdamiesi pagrindine trigonometrijos tapatybe, vietoj jo įrašome 1.
- Apskaičiuojame gauto skaitinio reiškinio reikšmę.

Atsakymas. -2 .

II Pamėgink.



Suprastink reiškinį $6 - 2 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha$.

Spręsk 3–4 uždavinius (p. 26).

3 Apskaičiuok reiškinio reikšmę:

- a) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha$, kai $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$;
 b) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, kai $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ ir $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
 c) $\operatorname{tg} \alpha$, kai $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} = 4$ ir $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
 d) $\frac{(\operatorname{tg} \alpha + 1)(\operatorname{tg} \alpha - 1)}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$, kai $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$;
 e) $\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$, kai $\cos \alpha = \frac{9}{41}$ ir $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;
 f) $\sin \alpha$, kai $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$ ir $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

4 Įrodyk tapatybę:

- a) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$; b) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$;
 c) $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha$; d) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
 e) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} = -1$; f) $\frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;
 g) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$; h) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

5 Suprastink reiškinį:

- a) $1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; b) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha$;
 c) $\left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$; d) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;
 e) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$; f) $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha$;
 g) $\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha$; h) $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
 i) $\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$; j) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$;
 k) $\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$; l) $\frac{1 - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$.

6 Apskaičiuok $\sin \alpha$ ir $\cos \alpha$, kai:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; b) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
 c) $\operatorname{tg} \alpha = -0,2$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; d) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

7 Apskaičiuok reiškinio reikšmę:

- a) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$, kai $\operatorname{tg} \alpha = 1,2$; b) $2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, kai $\operatorname{ctg} \alpha = 5$;
 c) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - 4,5}$, kai $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$; d) $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$, kai $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{5}$.

8 Apskaičiuok reiškinio reikšmę, kai kampas α yra smailusis:

- a) $\frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}$, kai $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; b) $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{5 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}$, kai $\operatorname{tg} \alpha = 5$;
 c) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$, kai $\sin \alpha = \frac{2}{5}$; d) $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{3 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$, kai $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$.

9 Apskaičiuok:

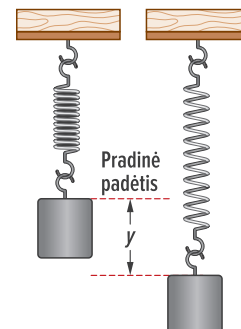
- a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, kai $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$; b) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, kai $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,6$;
 c) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, kai $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2,4$; d) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, kai $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

10 Taikydamas redukcijos taisyklę, išreikšk šias trigonometrines funkcijas smailiojo kampo α trigonometrinėmis funkcijomis:

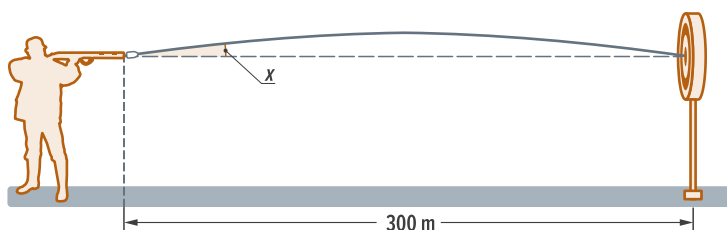
- a) $\sin(2\pi - \alpha)$; b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
 e) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; f) $\cos(2\pi + \alpha)$; g) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; h) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$.

- 68 Parduotos žiemos sporto įrangos kiekis S (šimtais vienetų) aprašomas funkcija $S = 58,3 + 32,5 \cos \frac{\pi t}{6}$; čia t – laikas (mėnesiais), reikšmė $t = 1$ atitinka sausio mėnesį, reikšmė $t = 12$ – gruodžio mėnesį, $1 \leq t \leq 12$, $t \in \mathbb{N}$. Nustatyk, kurį mėnesį žiemos sporto įrangos parduota daugiausia, kurį mėnesį – mažiausiai. Kuriais mėnesiais įrangos parduota daugiau nei 7500 vienetų?

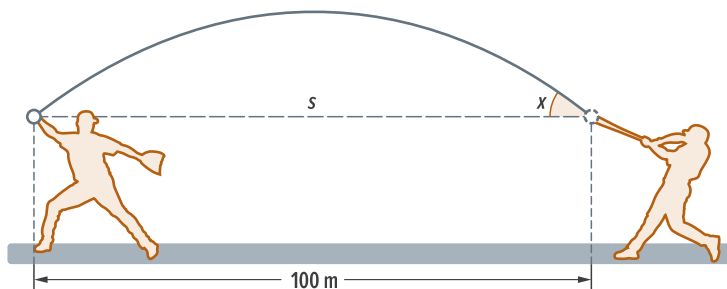
- 69 Prie spyruoklės prikabinas pasvaras taip, kaip parodyta brėžinyje. Ištempus spyruoklę ir paskui ją paleidus, pasvaras juda pagal dėsnį $y = \frac{1}{12} (\cos(8t) - 3 \sin(8t))$; čia y – pasvaro nuokrypis nuo pradinės padėties (pavaizduotas brėžinyje) laiko momentu t . Nustatyk, kuriais laiko momentais (sekundės šimtosios dalies tikslumu) svyruojantis pasvaras bus pradinėje padėtyje, t. y. $y = 0$ (čia $0 \leq t \leq 1$).



- 70 Šaulys šauna į taikinį, esantį už 300 m (žr. brėžinį). Kulka, išlekiančios iš šautuvo, pradinis greitis yra 400 m/s. Kulka pradinį greitį v , atstumą s iki taikinio ir kampą x , kuriuo reikia pakreipti šautuvą, sieja dėsnis $s = \frac{1}{32} v^2 \sin(2x)$. Apskaičiuok kampo x didumą šimtosios laipsnio dalies tikslumu.



- 71 Beisbolo kamuoliukas po smūgio kyla kampu x pradiniu greičiu $v = 57$ m/s. Kamuoliukas yra pagaunamas už 100 m (žr. brėžinį). Apskaičiuok kampo x didumą 1° tikslumu, jei kamuoliuko judėjimas apibūdinamas formule $s = \frac{1}{32} v^2 \sin(2x)$.



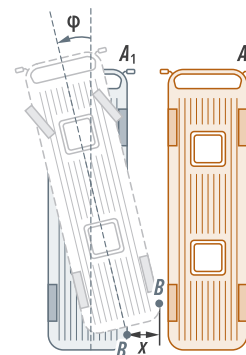
- 72 Kai autobusas A_1 suka į kairę, jo galas juda į dešinę, kaip parodyta brėžinyje, todėl gali atsitrekti į greta stovintį autobusą A_2 . Autobuso A_1 galo į dešinę nueitas atstumas (t. y. atstumas x) apskaičiuojamas pagal formulę

$$x = \frac{1}{3} \sqrt{(4 + 18 \operatorname{ctg} \varphi)^2 + 100} - \frac{1}{3} (4 + 18 \operatorname{ctg} \varphi);$$

čia x – atstumas metrais, φ – kampas, kuriuo pasisuka autobusas.

Apskaičiuok:

- kokią atstumą (1 cm tikslumu) nueina autobuso galas į dešinę, jei autobusas pasisuka 30° kampu;
- koku didžiausiu kampu (1° tikslumu) gali pasisukti autobusas A_1 , kad nekliudytų autobuso A_2 , stovinčio greta 0,5 m atstumu.



Prarastos trigonometrinės funkcijos

Kokia tau pasirodė trigonometrija? Nelabai lengva? Tikrai sunkoka: keturios trigonometrinės funkcijos, keturios joms atvirkštinės funkcijos... Daugoka.

Tai neatrodys daug, jei sužinosi, kad trigonometrinių funkcijų galima rasti daug daugiau. Jei studijuosi užsienio universitete, ko gero, susidursi su dar dviem trigonometrinėmis funkcijomis – sekantu $\sec x$ ir kosekantu $\operatorname{cosec} x$. Šias funkcijas galbūt pamena tavo senelis, apie jas dar kai kas yra girdėjęs, tačiau yra daugybė kitų trigonometrinių funkcijų, kurios prieš kelis šimtmečius buvo aktyviai naudojamos, bet šiandien jų nežino net matematikos mokytojai. Neturime ir lietuviškų jų pavadinimų. Vadiname jas taip, kaip įvardytas aptinkame senuosiuose raštuose: $\operatorname{versin} x$, $\operatorname{excsc} x$, $\operatorname{exsec} x$, ...

Paslaptis ta, kad seniau, kai nebuvo skaičiuotuvių ir buvo sunku atlikti skaičiavimus, papildomos trigonometrinės funkcijos tikrai praversdavo. Mat trigonometrinių funkcijų reikšmės buvo galima rasti specialiose entuziastų parengtose lentelėse. Buvo patogu turėti tokias lenteles visiems dažniau naudojamiems veiksams, užuot kaskart skaičiavus.

Visų šių funkcijų, kaip ir sinuso bei kosinuso, reikšmės apibrėžiamos naudojant vienetinį apskritimą.

Užduotys

- 1 Nubrėžiamas vienetinis apskritimas ir jame pavaizduojamas kuris nors smailusis posūkio kampas α . Šio kampo sinusas – stačiojo trikampio ABO statinio AB ilgis, kosinusas – statinio OB ilgis.

Brėžinys papildomas – per tašką A nubrėžiama apskritimo liestinė. Ji kerta ašį Oy taške D , ašį Ox – taške C .

a) Įrodyk, kad $AC = \operatorname{tg} \alpha$, o $AD = \operatorname{ctg} \alpha$.

b) Apibrėžiame dar dvi trigonometrines funkcijas:

$$OD = \operatorname{cosec} \alpha, \quad OC = \sec \alpha.$$

Įrodyk, kad $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

- 2 Apibrėžiame dar keletą funkcijų:

$$\operatorname{versin} \alpha = BM,$$

$$\operatorname{excsc} \alpha = ND,$$

$$\operatorname{exsec} \alpha = MC,$$

$$\operatorname{crd} \alpha = AM.$$

Susiek šias funkcijas su mums įprastomis trigonometrinėmis funkcijomis $\sin \alpha$ ir $\cos \alpha$.

