

PRATARMĖ

Visi jūsų matematikos vadovėliai labai tvarkingi: medžiaga išdėstyta nuosekliai, suskirstyta temomis. Mokytojai visada padeda – pasako, kuris uždavinys yra lengvesnis, kuris – sunkesnis.

Ateinate į egzaminą ir sutrinkate: šis uždavinys yra iš vienos temos, o šis – iš kitos; vienos temos – trys uždaviniai, kitų temų – nė vieno.

Kartais prie uždavinio nurodyta jo vertė taškais, kartais parašyta *easy*, *medium*, *hard*, bet tai tik tu, kurie pateikė uždavinius, nuomonė. Jums gali atrodyti visai kitaip.

Todėl ir siūlome pasinaudoti šia knyga, parengta išsiaiškinus, kokie yra PUPP (pagrindinio ugdymo pasiekimų patikrinimas), VBE (valstybinis brandos egzaminas), SAT (Scholastic Aptitude Test), GRE (Graduate Record Examination), ЕГЭ (единый государственный экзамен) ir panašūs egzaminai.

Pirmoje dalyje – uždavinių sąlygos. Greta vaikiško uždavinio septintokui pateiktas solidus uždavinys abiturientui. Atpažinsite? Mokėsite pasirinkti?

Antroje dalyje – uždavinių sprendimai... Iš pradžių ją praleiskite! Pirmą uždavinį išspręskite patys. Paskui pasitikrinkite atsakymą (trečioje dalyje). Bet net tuo atveju, jei išsprendę gavote tokį atsakymą, koks nurodytas knygoje, vis tiek pažiūrėkite, kaip tą uždavinį išsprendė mes. Dvi galvos geriau nei viena, tiesa?

Pasigėrėkite savimi – gal išsprendėte gražiau, paprasčiau! Arba pasimokykite iš mūsų.

Būkite pasirengę netikėtumams. Kartais turite nueiti ilgą kelią, kol gausite paprastą atsakymą (pvz., 100 užd.). Kai kuriuos uždavinius galima išspręsti penkiais šešiais būdais (pvz., 53 užd.). Kai kurių uždavinių atsakymai atrodo keisti, gremėzdiški (pvz., 115 užd.). Bet kodėl jie neturėtų tokie būti? Juk čia yra daug uždavinių, kuriuos sukūrė autorius, visai negalvodamas apie tai, kad atsakymai turi būti „gražūs“.

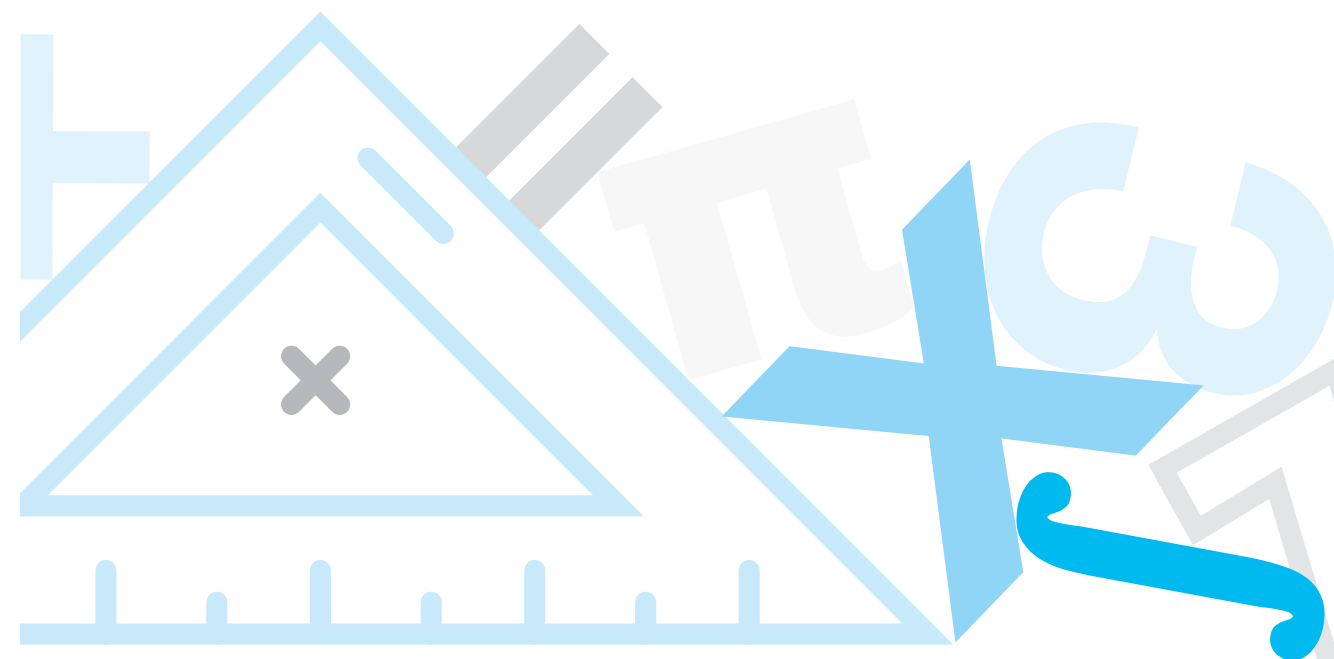
Bus užuominų ir į aukštąją matematiką (pvz., 120 užd.), bet tikrai neprivalote mokėti daugiau, nei mokoma mokykloje.

Autorius nuoširdžiai dėkoja tikram matematikui kūrėjui Sergejui Sokolovui už teisę keletą jo labai patrauklių uždavinių įdėti į šią knygą. Tikriausiai atspėsite, kurie uždaviniai yra S. Sokolovo. Tiesa, gali būti, kad šios knygos autorius nepateikė gražiausio tų uždavinių sprendimo...

Moksleiviai Gabija, Ieva, Nomeda, Elzė, Kamilė, Jonas, Matas, kitas Matas, trečias Matas, Titas, Edgaras, Andrius, Margiris leido man juos mokyti, nors esu dar naujokas Vilniuje, neįrodęs savo gebėjimo mokyti. Nuoširdžiai dėkoju jiems visiems, kad pasitikėjo manimi!

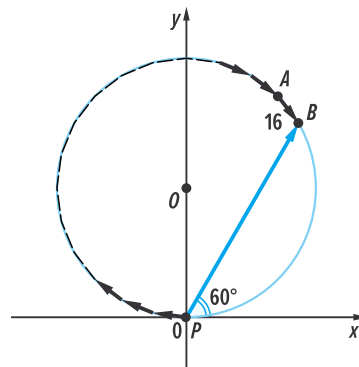
Dr. Bronislovas Burgis,
kuris mokė ir moko, nors tai labai atsakinga ir net... rizikinga

UŽDUOTYS



- 1 Keleivis važiavo traukiniu. Nuvažiavęs trečdalį kelio, jis atsigulė ir miegojo tol, kol liko važiuoti trečdalis to kelio, kurį jis nuvažiavo miegodamas. Kurią viso kelio dalį keleivis nuvažiavo miegodamas?

- 2 Apskritimo spindulio ilgis R , apskritimo centras yra taške $O(0; R)$. Iš taško P į apskritimą įbrėžta 16 vienas po kito einančių vieno ilgio vektorių, abiem galais liečiančių apskritimą. Tų vektorių suma yra vektorius $\overrightarrow{PB}$, pasviręs į abscisių ašį 60° kampui. Apskaičiuokite šešioliktojo vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ pradžios ir pabaigos taškų koordinates bei to vektoriaus ilgį.



- 3 Didelėje šeimoje yra daug gabių, darbščių, smalsių vaikų. Septyni vaikai lanko šachmatų būrelį, šeši vaikai – kompiuterijos būrelį. Penki vaikai lanko futbolo būrelį, keturi vaikai – ir šachmatų, ir kompiuterijos būrelius. Du vaikai lanko ir kompiuterijos, ir futbolo būrelius. Trys vaikai lanko ir futbolo, ir šachmatų būrelius. O vienas vaikas lanko ir šachmatų, ir kompiuterijos, ir futbolo būrelius. Kiek šeimoje vaikų?

- 4 Skaičių $\frac{100}{151}$ paverskite dešimtaine trupmena.

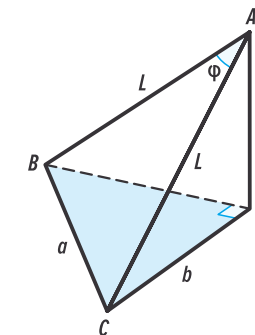
- 5 Išspręskite nelygybę $\log_x(\log_x \sqrt{6-x}) > 0$.

- 6 Baseiną galima pripildyti vandens leidžiant jį vienu ar keliais iš penkių vamzdžių. Pirmuoju vamzdžiu baseinas pripildomas per 40 minučių. Leidžiant vandenį antruoju, trečiuoju ir ketvirtuoju vamzdžiais vienu metu, baseinas pripildomas per 10 minučių. Leidžiant vandenį antruoju, trečiuoju ir penktuoju vamzdžiais vienu metu, baseinas pripildomas per 15 minučių. Leidžiant vandenį ketvirtuoju ir penktuoju vamzdžiais vienu metu, baseinas pripildomas per 20 minučių. Kiek minučių prireiks, kol baseinas bus pilnas, jei vanduo vienu metu bus leidžiamas visais penkiais vamzdžiais?

- 7 Apskritimo, kurio spindulio ilgis lygus 1, o centras yra koordinačių pradžioje, lygtis yra $x^2 + y^2 = 1$. Pritaikydami analogiją ir naudodami kompiuterio skaičiuoklę nubraižykite kreivės, kurios lygtis $x^{10} + y^{10} = 1$, eskizą.

- 8 Išspręskite nelygybę $3|x-1| + x^2 - 7 > 0$.

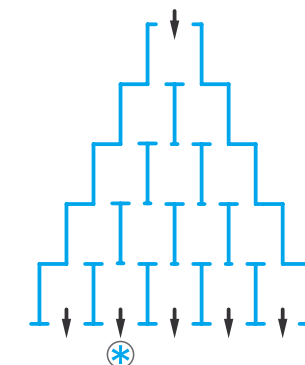
- 9 Dvi vienodo ilgio L atkarpos AB ir AC eina iš taško A iki plokštumos. Kampas tarp tų atkarpų yra φ . Atkarpų projekcijos DB ir DC statmenos. Apskaičiuokite atstumą nuo taško A iki plokštumos (atstumą AD).



- 10 Pramogų parke įrengtas labirintas.

Nusipirkęs bilietą pramogautojas eina labirintu kurio nors išėjimo link. Prie kiekvieno išėjimo tarnautojai dalija dovanas. Pramogautojai iš anksto nežino, prie kurio išėjimo dalijamos brangesnės dovanos, todėl labirinto kelius renkasi atsitiktinai.

Vieną dieną prie išėjimo, pažymėto žvaigždute, tarnautojas su dovonomis neatėjo... Kokia tikimybė, kad bent vienas iš dešimties pramogautojų, tą dieną einančių labirintu, dovanos negaus?



- 11 Iš ryto atėjęs į darbą transporto bendrovės vadovas matė kieme stovinčius penkis MAN markės ir penkis „Volvo“ markės sunkvežimius. Priešpiet užsakovas paprašė trijų MAN markės sunkvežimių. Bendrovės vadovas, paskambinęs į apsaugos postą, paklausė, kiek sunkvežimių dar yra kieme. Jam atsakė, kad yra penki, bet nenurodė markės. Kokia tikimybė, kad kieme dar yra trys MAN markės sunkvežimiai?

- 12 Apklausus 24 abiturientus sužinota, kad jų matematikos metiniai pažymiai yra tokie:

7	5	8	8	9	10
10	8	7	8	9	9
10	6	6	5	8	10
9	8	10	10		6

Tik vėliau pastebėta, kad lentelėje vieno pažymio trūksta. Tačiau žinoma, kad visų pažymių vidurkis yra 8. Raskite trūkstamą pažymį, imties modą ir medianą.

- 13 Trikampio ABC kraštinės galima išreikšti vektoriais: kraštinę AB – vektoriumi $\vec{a} = (4; 4)$, kraštinę AC – vektoriumi $\vec{b} = (-2; 2)$, kraštinę CB – vektoriumi $\vec{c} = (6; 2)$. Apskaičiuokite apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį ir į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgį.

- 14 Sieninė spinta turi m lentynų. Kiekvienoje lentynoje yra penkiomis knygomis daugiau nei lentynos numeris (lentynos skaičiuojamos nuo apačios iki viršaus; bet galima skaičiuoti ir atvirkščiai). Sudarykite formulę knygų kiekiui spintoje apskaičiuoti.

- 137** Kūgio pagrindo spindulio ilgis 10, o kūgio tūris 600π . Taškas T – kūgio viršūnė, o taškai A ir B yra pagrindą ribojančiame apskritime. Lankas $AB = \alpha < 180^\circ$. Apskaičiuokite kampo ATB didumą.

SPRENDIMAS

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H; \quad V = 600\pi; \quad R = 10;$$

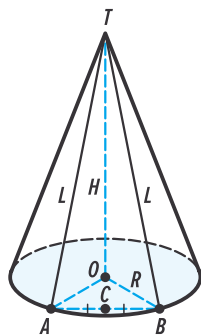
$$H = \frac{3 \cdot 600\pi}{100\pi} = 18; \quad L = \sqrt{100 + 324} = 2\sqrt{106}; \quad AC = R \cdot \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$\sin \angle ATC = \frac{AC}{L} = \frac{10 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{106}} = \frac{5\sqrt{106} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{106}; \quad \angle ATC = \arcsin \frac{5\sqrt{106} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{106};$$

$$\angle ATB = 2 \cdot \arcsin \frac{5\sqrt{106} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{106}.$$

ATSAKYMAS

$$2 \arcsin \frac{5\sqrt{106} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{106}.$$



- 138** Į apskritą dėžutę, kurios spindulys $R = 5$ cm, įdėtos penkios monetos taip, kad liestų dėžutės sienelės ir viena kitą. Apskaičiuokite monetos spindulio ilgį.

SPRENDIMAS

Panagrinėkime dėžutės su viena moneta fragmentą.

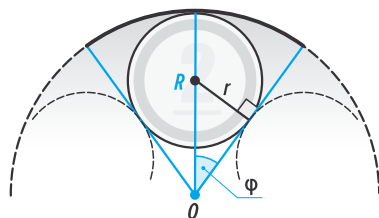
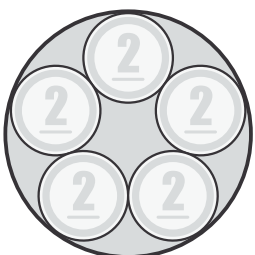
Matome, kad $\frac{r}{R-r} = \sin \varphi$. Kai dėžutėje yra penkios monetos, akivaizdu, kad $10\varphi = 2\pi$. Taigi

$$\frac{r}{R-r} = \sin \frac{2\pi}{10}; \quad r = R \cdot \sin \frac{\pi}{5} - r \cdot \sin \frac{\pi}{5}; \quad r = \frac{R \cdot \sin \frac{\pi}{5}}{1 + \sin \frac{\pi}{5}}.$$

Įrašę reikšmes $R = 5$ ir $\sin \frac{\pi}{5} \approx 0,59$, gauname $r \approx 1,850$.

ATSAKYMAS

$r \approx 1,850$ cm.



- 139** Panaikinkite iracionalumą trupmenos $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ vardiklyje.

SPRENDIMAS

Pirmas būdas

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{(2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{4}.$$

Antras būdas

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 - 2 - 2\sqrt{6} - 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{6} + 2)} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{6} - 2)}{2(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{6} - 2)}{4}.$$

140

Natūralieji skaičiai a ir b tenkina lygybę $a \cdot b + a + b = 38$. Apskaičiuokite sumos $a + b$ reikšmę.

SPRENDIMAS

Uždavinį lengva išspręsti bandymų metodu. Kairėje lygybės pusėje yra simetrija a ir b atžvilgiu, todėl galima iš eilės imti a reikšmes ir bandyti pritaikyti b reikšmę.

Kai $a = 1$, tai arčiausiai „tikslu“ $b = 18$, bet $1 \cdot 18 + 1 + 18 = 37$.

Kai $a = 2$, tai $2 \cdot 12 + 2 + 12 = 24 + 14 = 38$; $a + b = 14$.

ATSAKYMAS

14.

141

Keliais procentais sutrumpėtų automobilio kelionės iš vietovės A į vietovę B laikas, jei automobilio judėjimo vidutinis greitis būtų padidintas 25 %?

SPRENDIMAS

$$s = v \cdot t; \quad t_1 = \frac{s}{v}; \quad t_2 = \frac{s}{1,25 \cdot v}.$$

Sudarome proporciją:

$$\frac{\frac{s}{v}}{\frac{s}{1,25 \cdot v}} = \frac{100\%}{x\%}, \quad x = \frac{\frac{s}{1,25 \cdot v} \cdot 100}{\frac{s}{v}} = 80\%.$$

Kelionės laikas sutrumpėtų 20 %.

ATSAKYMAS

20 %.

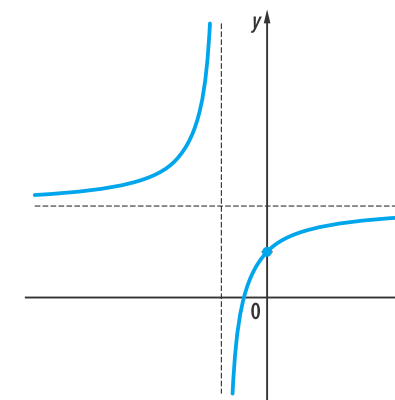
142

Į indą, kuriame yra vienas litras 10 % koncentracijos druskos tirpalo, pilamas 30 % koncentracijos tirpalas.

1) Sudarykite funkciją, kuri rodytų druskos koncentracijos kitimą inde, į kurį pilamas tirpalas.

2) Įrodykite (taikydami grafiko transformacijas), kad gautos funkcijos grafikas yra brėžinyje parodyto grafiko dalis. Kuri dalis? Sugraduokite grafiko ašis.

3) Laikydami, kad pradinė tirpalo koncentracija yra A , o pilamo tirpalo koncentracija – B , vienoje koordinatinių sistemoje nubraižykite trijų grafikų eskizus: kai $A < B$, kai $A = B$ ir kai $A > B$.



- 1 $\frac{1}{2}$ kelio.
- 2 $A\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}; R\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right), B\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}R\right);$
 $|\overline{AB}| = R\sqrt{2 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$
- 3 10 vaikų.
- 4 0,(6622516556291390728476821192052980132
45033112582781456953642384105960264900).
- 5 $x \in (2; 6).$
- 6 7,5 min.
- 7 Žr. brėžinį skyriuje „Sprendimai“.
- 8 $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty).$
- 9 $L\sqrt{\cos \varphi}.$
- 10 $\approx 0,94.$
- 11 0,5.
- 12 6; 8 ir 10; 8.
- 13 $R = \sqrt{10}; r = 3\sqrt{2} - \sqrt{10}.$
- 14 $\frac{m^2 + 11m}{2}.$
- 15 $y = \frac{x}{3}.$
- 16 1 ir 7.
- 17 42 km.
- 18 63.
- 19 -1; 4; 5.
- 20 55.
- 21 $\begin{cases} x = R(\varphi - \sin \varphi), \\ y = R(1 - \cos \varphi). \end{cases}$
- 22 Pirmojo abituriento rezultatai geresni.
- 23 4,8 ir 6,4.
- 24 259 detales.
- 25 $A - 5; B - 6; C - 3; D - 2.$
- 26 $x \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{5}{2}\right) \cup (4; +\infty).$
- 27 $a \in (-2; 2).$

- 28 3.
- 29 Laimės pirmasis slidininkas, bet gali būti ir kitaip. Žr. skyrių „Sprendimai“.
- 30 $\frac{2}{\pi}; 3; 2.$
- 31 Žr. įrodymą skyriuje „Sprendimai“.
- 32 $\angle DEF = 35^\circ, \angle BFA = 90^\circ, \angle BAF = 55^\circ.$
- 33 Visi teiginiai, išskyrus antrąjį, teisingi.
- 34 Sistema realiųjų sprendinių neturi.
- 35 1.
- 36 $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
- 37 Žr. įrodymą skyriuje „Sprendimai“.
- 38 7.
- 39 $(v - u) \cdot (2u^2 + v).$
- 40 $x = -\sqrt{4 - y^2}.$
- 41 $2\sqrt{2}.$
- 42 Taške $\frac{\pi}{4}$ didesnė funkcijos $f(x)$ reikšmė, didesnis ir šios funkcijos kitimo greitis tame taške.
- 43 $\frac{7}{15}.$
- 44 Žr. brėžinį skyriuje „Sprendimai“.
- 45 $3\sqrt{2}$ cm ir $\sqrt{6}$ cm.
- 46 $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$
- 47 $M(1; -1)$ ir $N(-1; 3).$
- 48 Tilps.
- 49 $\frac{\sqrt{7}}{2}.$
- 50 Žr. įrodymą skyriuje „Sprendimai“.
- 51 $-40 \sin(16x).$
- 52 1) Žr. įrodymą skyriuje „Sprendimai“;
2) $R = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3};$
3) $O\left(2; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

- 53 $90^\circ.$
- 54 36 min.
- 55 Žr. brėžinį skyriuje „Sprendimai“.
- 56 $(3; -2).$
- 57 -5; 3.
- 58 $\frac{1}{27}.$
- 59 $y = \frac{(3-n)x}{1-n}.$
- 60 $ab + 3a.$
- 61 20 %.
- 62 $-\frac{4\sqrt{10}}{9}; \frac{4\sqrt{10}}{9}.$
- 63 $3\sqrt{2} - 2.$
- 64 Trikampio formos pjūvio plotas yra $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 0,87a^2$, kvadrato formos pjūvio plotas - a^2 , rombo formos pjūvio plotas - $\frac{a^2 \cdot \sqrt{6}}{2} \approx 1,22a^2$, šešiakampio formos pjūvio plotas - $\frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30a^2$, stačiakampio formos pjūvio plotas - $a^2 \cdot \sqrt{2} \approx 1,41a^2.$
- 65 $(7; 3), (3; 5).$
- 66 3.
- 67 $\approx 4,82$ m.
- 68 Išvestinę skaičiuoti beprasmiška. Žr. skyrių „Sprendimai“.
- 69 Šiuo atveju vidurkių vidurkis lygus įverčių vidurkiui.
- 70 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$
- 71 1) 56;
2) trečiasis narys gali būti bet koks.
- 72 1) Per 5 minutes;
2) 2 000 detalių.
- 73 $\sqrt{2}.$
- 74 7.
- 75 $x = \frac{a \cdot m}{a + b}$ (žr. pav. skyriuje „Sprendimai“).

- 76 $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha).$
- 77 $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$
- 78 $\frac{3}{2}.$
- 79 -23.
- 80 $-\frac{68}{77}.$
- 81 4.
- 82 $p_2 = \frac{59}{120}; p_4 = \frac{13}{120}; x_3 = \frac{16}{3}.$
- 83 Žr. įrodymą skyriuje „Sprendimai“.
- 84 $\approx 3,8.$
- 85 1,4(6) m.
- 86 $\approx 0,17.$
- 87 Žr. brėžinį skyriuje „Sprendimai“.
- 88 $C(-1; -5).$
- 89 $y = \frac{4}{3}x.$
- 90 Žr. įrodymą skyriuje „Sprendimai“.
- 91 $-\arcsin \frac{\pi}{6}; \arcsin \frac{\pi}{6}; \pi - \arcsin \frac{\pi}{6}; \pi + \arcsin \frac{\pi}{6}.$
- 92 $(0; 0), (1; 0).$
- 93 Žr. skyrių „Sprendimai“.
- 94 4, 7, 10.
- 95 $50 - \frac{50\sqrt{3}}{3}.$
- 96 $-\frac{1}{2} \sin(8\alpha).$
- 97 1) ≈ 19 cm;
2) $54^\circ;$
3) $\approx 0,5$ kg.
- 98 $\approx 0,008.$
- 99 1) $S = 15;$
2) $u = \frac{\sqrt{205}}{2};$
3) $AD = \sqrt{40}.$
- 100 $x \in (1; 2).$