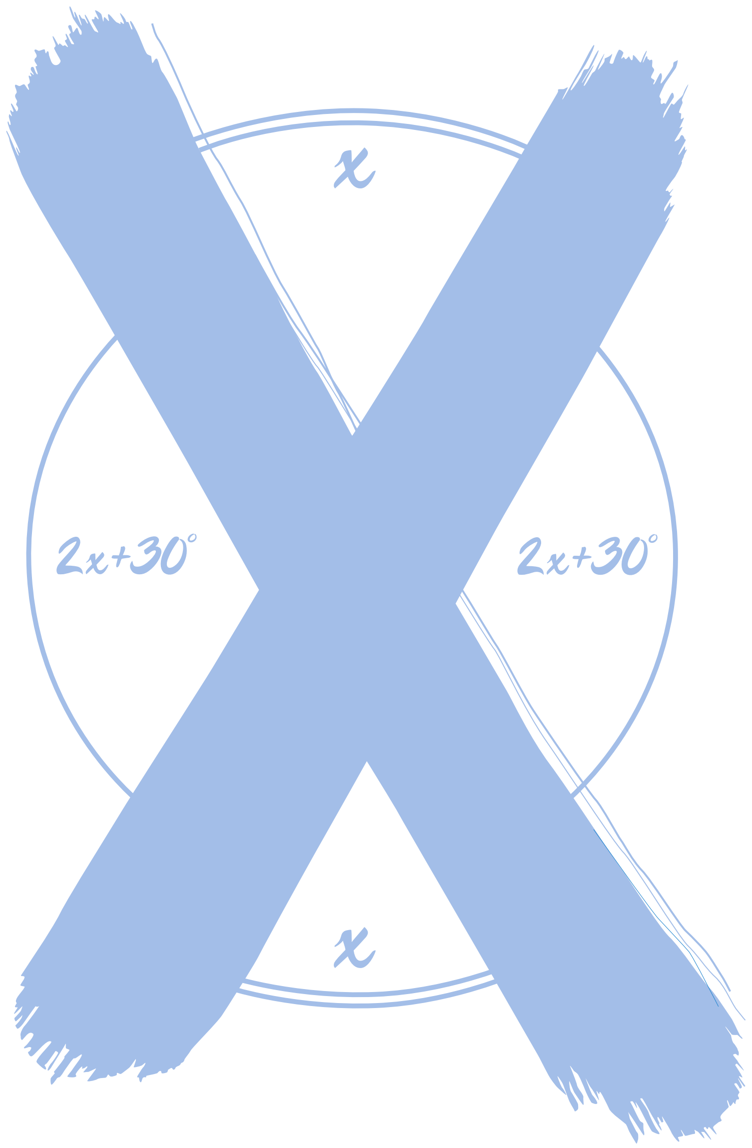
MATEMATIKA (NE)LENGVAI

BRONISLOVAS BURGIS

11–12 KLASEI



TEORIJA, PAVYZDŽIAI, UŽDAVINIAI

ŠVIESA

TURINYS

(NE)LENGVOS TEMOS

1 ABITURIENTO MATEMATINĖ ABĖCĖLĖ

Ką reikia prisiminti?

Jūs daug išmokote, abiturientai!

Galite lengvai apskaičiuoti:

$$\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}} = \frac{7^{10,4}}{7^{8,4}} = 7^{10,4-8,4} = 7^2 = 49;$$

$$2^{2x} \cdot 3^x + 12^x - 2^{x+1} \cdot 6^x = 4^x \cdot 3^x + 12^x - 2 \cdot 2^x \cdot 6^x = 12^x + 12^x - 2 \cdot 12^x = 0.$$

Mokate susirasti tinkamą formulę, pavyzdžiui, kitokią dvinario kėlimo kubu formulę:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Pritaikykime ją, įrodydami tapatybę $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Štai taip:

$$\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3 = 9 + \sqrt{80} + 9 - \sqrt{80} + 3 \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} \cdot 3 =$$

$$= 18 + 3 \cdot \sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})} \cdot 3 = 18 + 3 \cdot \sqrt[3]{1} \cdot 3 = 27;$$

$$\sqrt[3]{27} = 3.$$

Žinote, kaip praverčia keitiniai. Pavyzdžiui, apskaičiuokime be skaičiuotuvo

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt{3}}}{3 + \sqrt[6]{108}}.$$

Pirmiausia išsiaiškiname, kaip pakeisti $\sqrt[6]{108}$:

$$\sqrt[6]{108} = \sqrt[6]{27 \cdot 4} = \sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Pritaikome keitinius $\sqrt{3} = a$, $\sqrt[3]{2} = b$:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt{3}}}{3 + \sqrt[6]{108}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a^4 - ab^3}{a-b} + a^2b\right) \cdot a}}{a^2 + ab} = \frac{\sqrt{\frac{a^4 - ab^3 + a^3b - a^2b^2}{a-b} \cdot a}}{a^2 + ab} = \frac{\sqrt{\frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a-b} \cdot a^2}}{a^2 + ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a-b}}}{a+b}.$$

Dabar galimi du keliai:

1) $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2 = a^2(a+b) - b^2(b+a) = (a+b)(a^2 - b^2)$;

$$\frac{\sqrt{\frac{(a+b)(a^2-b^2)}{a-b}}}{a+b} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Pastebėkime, kad traukiant šaknį $\sqrt{(a+b)^2}$ modulio rašyti nereikia – abu dėmenys yra teigiami.

2) Padalijame daugianarį iš dvinario:

$$\begin{array}{r|l} a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 & a - b \\ \cline{2-2} -\underline{a^3 - a^2b \qquad\qquad\quad} & a^2 + 2ab + b^2 \\ 2a^2b - ab^2 \qquad\; & \\ -\underline{2a^2b - 2ab^2 \qquad\;} & \\ ab^2 - b^3 & \\ -\underline{ab^2 - b^3} & \\ 0 \quad & \end{array}$$

Iškart matome, kad

$$\frac{\sqrt{\frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a-b}}}{a+b} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Mokate derinti įvairias formules. Štai taip išskaidote dvinarius daugikliais:

a) $x^4 + 16 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 4 = (x^2+4)^2 - 8x^2 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$;

b) $x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 - 8)(x^3 + 8)$. (Galima skaidyti toliau...)

Galima pradėti kitaip:

$x^6 - 64 = (x^2)^3 - 4^3 = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16)$. (Galima skaidyti toliau...)

Jei $2^x = 8$, tai žinote, kad $x = 3$, o jei $2^x = 5$, tai žinote, kad $x = \log_2 5$.

Mokate pakeisti logaritmų pagrindus:

$$\log_5 0{,}2 + \log_{0{,}5} 4 = \log_5 \frac{1}{5} + \frac{\log_2 4}{\log_2 \frac{1}{2}} = -1 + \frac{2}{-1} = -3.$$

Mokate nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį, pavyzdžiui, tokios funkcijos:

$$y = \log_{1-\sqrt{x-1}}(x^2 - 1).$$

Štai taip:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} > 0, \\ 1 - \sqrt{x-1} \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x-1} < 1, \\ x - 1 \geqslant 0, \\ \sqrt{x-1} \neq 0, \\ (x-1)(x+1) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x < 2, \\ (x-1)(x+1) > 0; \end{cases} \quad 1 < x < 2.$$

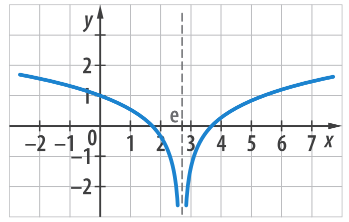
Mokate „atsikratyti“ modulio (apie jį skaitykite kitoje temoje), mokate braižyti grafikus.

Nubraižykime funkcijos $y = \ln|x - \mathrm{e}|$ grafiko eskizą.

Jei $x - \mathrm{e} > 0$, arba $x > \mathrm{e}$, tai $y = \ln(x - \mathrm{e})$.

Jei $x - \mathrm{e} < 0$, arba $x < \mathrm{e}$, tai $y = \ln(\mathrm{e} - x)$.

Štai toks grafiko eskizas (žr. pav.).



Mokate spręsti ir tokius uždavinius, kurių sprendimui nereikia jokių formulių, pakanka tiesiog sugalvoti, pabandyti... Štai toks uždavinys:

Natūraliojo skaičiaus ir iš jo skaitmenų atvirkščia tvarka užrašyto skaičiaus sandauga yra 2430. Kokie tai skaičiai?

Tai negali būti triženkliai skaičiai ar didesni. Šie skaičiai turi būti dviženkliai. Vienas iš jų turi būti lyginis, kito paskutinis skaitmuo turi būti 5. Abu skaičiai turi būti artimi 50, nes $50 \times 50 = 2500$. Du trys žingsneliai iki atsakymo: 54 ir 45.

Uždaviniai

1.1.
Nubraižykite funkcijos $y = -3^{1-x}$ grafiko eskizą.

1.2.
Apskaičiuokite: $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$.

1.3.
Apskaičiuokite: $(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16})$.

1.4.
Abiturientas rado nubraižytą grafiko eskizą ir šalia parašytas tokias funkcijas:

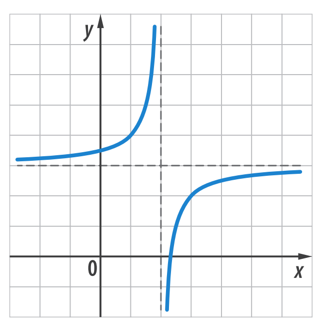
A $f(x) = \frac{1}{x+3}$

B $f(x) = \frac{1}{2x} + 3$

C $f(x) = \frac{1}{3-x}$

D $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$

E $f(x) = \frac{2}{3-x}$



Kurios funkcijos grafiko eskizas čia nubraižytas?

1.5.
Yra žinoma, kad $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}2$. Apskaičiuokite $\sin\alpha + \cos\alpha$.

1.6.
Su kokia a reikšme lygties $x^2 + ax - 10 = 0$ sprendinių skirtumas lygus 7?

2 KVADRATINĖ FUNKCIJA, KVADRATINĖ LYGTIS, KVADRATINIS TRINARIS, KVADRATINĖ NELYGYBĖ

Ką reikia prisiminti?

Ką čia matote?

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx + c \end{array}}$$

Teisingai, matote keturis vienodus užrašus.

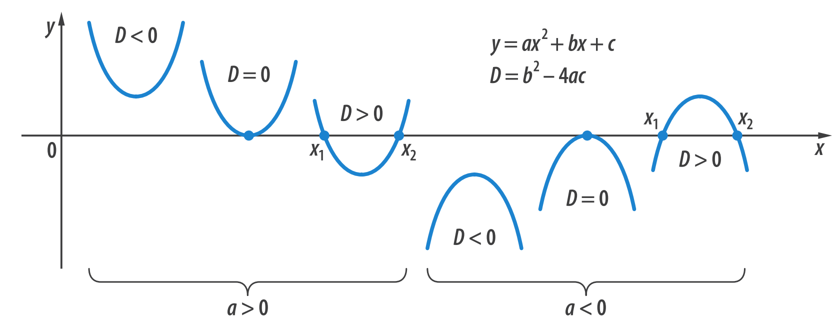
O ką matote dabar?

$$\begin{array}{rl} y = & ax^2 + bx + c \\ & ax^2 + bx + c = 0 \\ & ax^2 + bx + c \\ & ax^2 + bx + c \geqslant 0 \end{array}$$

Teisingai, matote kvadratinę funkciją, kvadratinę lygtį, kvadratinį trinarį ir kvadratinę nelygybę. Tai koks neišmanėlis gali pagalvoti, kad kiekvieną iš keturių, ką tik gimusių iš to paties, reikia mokytis atskirai?

Nubraižę kvadratinės funkcijos grafiką iškart žinosite, kuo baigsis kvadratinės lygties sprendimas, žinosite, ar galima išskaidyti kvadratinį trinarį, žinosite kvadratinės nelygybės sprendinius. Gali tekti tik kai ką patikslinti, jei iš brėžinio nebus aišku, kuriuose tiksliai taškuose grafikas kerta abscisių ašį.

Štai visi šeši galimi kvadratinės funkcijos grafikai. Matote jų ryšį ir su kvadratine lygtimi, ir su kvadratine nelygybe.



Jei kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ realieji sprendiniai yra x_1 ir x_2, tai kvadratinis trinaris išskaidomas taip:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Nepamirškite koeficiento a, kurį matote dešiniojoje lygybės pusėje! (Net jei tai buvo tik minuso ženklas prie x^2.)

• • •

Labai svarbu išmokti greitai ir patogiai spręsti kvadratines lygtis $ax^2 + bx + c = 0$.

$D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Jūs einate tokiu keliu? Be reikalo. Geriau taip:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Iš tiesų sprendžiant mokyklinius matematikos uždavinius, lygties diskriminantas dažniau būna teigiamas arba lygus nuliui negu neigiamas.

O kaip sprendžiate lygtį $x^2 + px + q = 0$? Tikrai nereikia jos spręsti taikant pateiktą formulę! Spręsti reikia taip:

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Nematote pranašumo?

Išspręskime lygtį $x^2 - 26x + 168 = 0$:

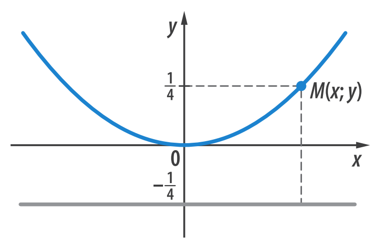
$x_{1,2} = 13 \pm \sqrt{169 - 168}$; $x_{1,2} = 13 \pm 1$; $x_1 = 12$, $x_2 = 14$.

Išvengėme dviaukštės formulės, dirbome su mažesniais skaičiais.

• • •

Kvadratinės funkcijos grafikas yra parabolė. Kas ji?

Parašykime lygtį tokios kreivės, kurios atsitiktinai parinkto taško $M(x; y)$ atstumas iki taško $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ ordinačių ašyje būtų lygus atstumui iki tiesės $y = -\frac{1}{4}$.



$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4}$; $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$; $x^2 = y$; $y = x^2$.

Tai štai kas ta parabolė! Tai kreivė, kurios bet kurio taško atstumas iki taško, vadinamo židiniu, lygus atstumui iki tiesės, vadinamos direktrise.

• • •

Kaip greitai ir patogiai nubraižyti duotos kvadratinės funkcijos grafiką?

Štai geriausias būdas. Tarkime, kad reikia nubraižyti funkcijos $y = -2x^2 + 4x + 5$ grafiką. Randame taškus, kuriuose ši parabolė susikerta su įsivaizduojama horizontalia tiese $y = 5$. Paprasčiau sakant, išsprendžiame (mintinai!) lygtį, pasirinkę tokią y reikšmę, koks yra kvadratinio trinario laisvasis narys:

$5 = -2x^2 + 4x + 5$; $-2x^2 + 4x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Turime du parabolės taškus. Aišku, kad parabolės viršūnės abscisė yra 1. (Tikrai aišku?)

Įrašę šią reikšmę į funkcijos išraišką, gauname viršūnės ordinatę 7. Dabar jau lengvai galite nubraižyti grafiko eskizą!

Pažiūrėkite, ką gautume, jei ieškotume taškų, kuriuose ši parabolė kerta abscisių ašį:

$-2x^2 + 4x + 5 = 0$; $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{4} = 1 \pm \sqrt{3{,}5}$.

„Negražūs“ skaičiai, tiesa?

Panagrinėkite šiuos uždavinių sprendimus.

1.

Su kokiomis a reikšmėmis lygties $(2 - x)(x + 1) = a$ sprendiniai yra realūs ir teigiami?

$x^2 - x + a - 2 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a + 2}$;

$\begin{cases} \frac{9}{4} - a \geqslant 0, \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - a} > 0, \\ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - a} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant \frac{9}{4}, \\ \frac{9}{4} - a < \frac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant \frac{9}{4}, \\ a > 2; \end{cases}$ $2 < a \leqslant \frac{9}{4}$.

Atsakymas. $2 < a \leqslant \frac{9}{4}$.

2.

Kokia turi būti a reikšmė, kad tiesė $y = ax$ nekirstų ir neliestų parabolės $f(x) = x^2 + 1$?

Sudarome lygčių sistemą ir pareikalaujame, kad ji neturėtų realiųjų sprendinių:

$\begin{cases} y = ax, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ $x^2 - ax + 1 = 0$;

$D = a^2 - 4$; $a^2 - 4 < 0$; $(a - 2)(a + 2) < 0$; $-2 < a < 2$.

Nubraižykite grafikus ir įsitikinkite, kad tiesė liečia parabolę, kai $a = 2$ arba kai $a = -2$.

Kokios yra lietimosi taškų koordinatės?

Atsakymas. $a \in (-2; 2)$.

3.

Parabolė eina per taškus $A(1; 4)$, $B(2; 1)$ ir viršūne liečia abscisių ašį. Parašykite šios parabolės lygtį.

Parabolės lygtį pertvarkome taip:

$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

Dabar aišku, kad parabolė viršūne lies abscisių ašį, jei bus teisinga lygybė

$-\frac{b^2}{4a} + c = 0$.

Sudarome ir išsprendžiame lygčių sistemą:

$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a} + c = 0, \\ a + b + c = 4, \\ 4a + 2b + c = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a + b + \frac{b^2}{4a} = 4, \\ 4a + 2b + \frac{b^2}{4a} = 1; \end{cases}$ $4a^2 + 4ab + b^2 = 16a$; $(2a + b)^2 = 16a$; $2a + b = -4\sqrt{a}$.

Kodėl dešiniojoje lygybės pusėje parašytas minusas, o ne pliusas? Reikėjo rinktis vieną iš dviejų. Pasirinkome minusą. Pasirinkite pliusą ir pamatysite, kuo baigsis sprendimas.

$b = -2a - 4\sqrt{a}$; $16a + 8(-2a - 4\sqrt{a}) + 4a + 16\sqrt{a} + 16 = 4$;

$4a - 16\sqrt{a} + 12 = 0$; $(\sqrt{a})^2 - 4\sqrt{a} + 3 = 0$; $a_1 = 1$, $a_2 = 9$;

$b_1 = -6$, $c_1 = 9$; $b_2 = -30$, $c_2 = 25$.

$y = x^2 - 6x + 9$, $y = (x - 3)^2$ arba $y = 9x^2 - 30x + 25$, $y = (3x - 5)^2$.

Nubraižykite tas paraboles ir įsitikinkite, kad abi jos atitinka sąlygą.

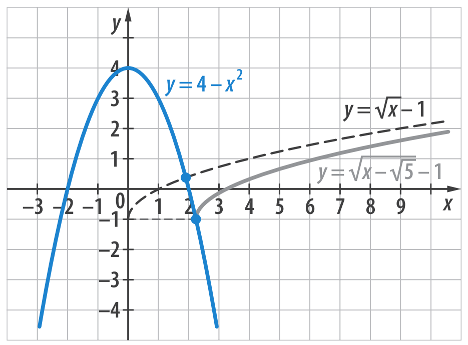
Atsakymas. $y = (x - 3)^2$ arba $y = (3x - 5)^2$.

4.

Duotos dvi funkcijos: $y = -ax^2 + 4$, $y = \sqrt{x+b} - 1$. Reikia parinkti tokias a ir b reikšmes, kad šių funkcijų grafikai ne kirstų vienas kitą, o tik liestų.

Suprantama, funkcijų grafikus reikia tinkamai pastumti vieną kito atžvilgiu. Gal galima pastumti tik vieną grafiką (pritaikyti vieną koeficientą), o kitą koeficientą pasirinkti laisvai? Galima, bet tai reikia daryti sumaniai, atsižvelgiant į tai, kaip kuris koeficientas keičia kreivės padėtį.

Jei, pavyzdžiui, pasirinktume $b = 0$, gautume kreivę, kuri brėžinyje parodyta punktyru. Deja, tokiu atveju jokia a reikšmė nepriverstų parabolės $y = -ax^2 + 4$ pasislinkti taip, kad ji tik liestų kitą kreivę.



Pasirinkime $a = 1$. Gauname brėžinyje parodytą parabolę $y = -x^2 + 4$. Dabar aišku, kad, tinkamai pasirinkę b reikšmę, kreivę $y = \sqrt{x+b} - 1$ galėsime pastumti taip, kad ji liestų parabolę.

Kiek reikia pastumti? Iki parabolės taško, kurio ordinatė yra (–1):

$-1 = -x^2 + 4; \quad x = \sqrt{5}.$

Taigi turi būti $b = -\sqrt{5}$. Tada $y = \sqrt{x - \sqrt{5}} - 1$.

Atsakymas. $a = 1$; $b = -\sqrt{5}$.

5.

Kokia turi būti $a > 0$ reikšmė, kad funkcijos $y = x^2 - 2ax + 3$ grafikas būtų virš tiesės $y = 2x - 1$?

Kvadratinės funkcijos išraišką pertvarkome taip:

$y = x^2 - 2ax + 3 = x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + 3 = (x-a)^2 + 3 - a^2.$

Dabar aišku, kad parabolės viršūnės abscisė yra $x_0 = a$, o parabolė pakelta virš abscisių ašies per $(3 - a^2)$. Taigi turime išspręsti nelygybę $3 - a^2 > 2a - 1$. Jos $a < \sqrt{5} - 1$.

Nubraižykite, pavyzdžiui, parabolę $y = x^2 - 2x + 3$ bei tiesę $y = 2x - 1$ ir įsitikinkite.

Uždaviniai

2.1.

Kiek yra šių parabolių sankirtos taškų: $f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = x - 3x^2$? Atsakykite į klausimą nebraižydami grafikų, paskui juos nubraižykite ir įsitikinkite, kad taškų skaičių apskaičiavote teisingai.

2.2.

Parašykite parabolės, einančios per taškus $A(-1; 2)$, $B(-2; 0)$ ir $C(1; 3)$, lygtį.

2.3.

Su kuria $a > 0$ reikšme vienas lygties $x^2 - 2x + a = 0$ sprendinys yra dukart didesnis už kitą?

2.4.

Kokia turi būti p reikšmė, kad kreivės $y = \sqrt{4 - x^2}$ ir $y = (x-1)^2 + p$ tik liestų viena kitą? Jei yra ne vienas variantas, pateikite juos visus.

2.5.

Išspręskite lygtį $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$.

2.6.

Išspręskite lygtį $3x^2 - 4x^4 + 1 = 0$.

2.7.

Išspręskite nelygybę $\frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4x + 4} \geqslant 0$.

3 TIESĖ

Ką reikia prisiminti?

Prisiminti reikia visai nedaug...

- Tiesės lygtis yra $y = kx + b$ arba $ax + by + c = 0$. Pirmuoju atveju $k = \operatorname{tg}\varphi$, φ – tiesės posvyrio į abscisių ašį kampas, b – atstumas nuo koordinačių pradžios iki taško, kuriame tiesė kerta ordinačių ašį.
  Iš lygties $y = kx + b$ negalima gauti tiesės, kuri yra lygiagreti su ordinačių ašimi, lygties. Ją gauname iš lygties $ax + by + c = 0$, kai $b = 0$.
- Koordinačių ašys – tai tiesės $y = 0$ ir $x = 0$.
- Tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ yra statmenos, jei $k_1 \cdot k_2 = -1$.
  Tiesės $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ yra lygiagrečios, jei $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

Panagrinėkite šiuos uždavinių sprendimus.

1.

Kokio ilgio atkarpos gaunamos susikertant šioms tiesėms: $4x - 2y = 8$, $y = 2x + 3$, $y = -x + 3$?

Ieškome tiesių porų sankirtos taškų:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8, \\ y = 2x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = 2x + 3; \end{cases} \quad \varnothing.$$

Šios dvi tiesės yra lygiagrečios, jos nesikerta. Vadinasi, susikirsdamos su trečiąja tiese (jei ir ta tiesė nėra su jomis lygiagreti), jos sudaro tik vieną atkarpą.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8, \\ y = -x + 3; \end{cases} \quad 2x - (-x + 3) = 4; \quad 3x = 7; \quad x = \tfrac{7}{3}; \quad y = \tfrac{2}{3}; \quad A\left(\tfrac{7}{3}; \tfrac{2}{3}\right).$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = -x + 3; \end{cases} \quad 2x + 3 = -x + 3; \quad x = 0; \quad y = 3; \quad B(0; 3).$$

$$AB = \sqrt{\left(0 - \tfrac{7}{3}\right)^2 + \left(3 - \tfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{49}{9} + \tfrac{49}{9}} = \tfrac{7\sqrt{2}}{3}.$$

Atsakymas. $\frac{7\sqrt{2}}{3}$.

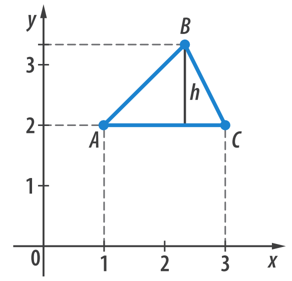
2.
Trys tiesės $y = x + 1$, $y = 2$, $2x + y = 8$ susikirsdamos sudaro trikampį. Apskaičiuokite šio trikampio plotą.

Randame trikampio viršūnių koordinates:

$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = 2; \end{cases}$ $\quad x = 1; \quad A(1; 2);$

$\begin{cases} y = x + 1, \\ 2x + y = 8; \end{cases}$ $\quad 3x = 7; \quad x = \frac{7}{3}; \quad y = \frac{10}{3}; \quad B\left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right);$

$\begin{cases} y = 2, \\ 2x + y = 8; \end{cases}$ $\quad x = 3; \quad C(3; 2).$



Dabar aišku, kad $AC = 2$, $h = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$, todėl $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

Atsakymas. $1\frac{1}{3}$.

3.
Apskaičiuokite atstumą tarp lygiagrečių tiesių $2x - y = 5$ ir $2y - 4x = 7$.

Perrašykime lygtis taip, kad būtų akivaizdu, jog tiesės yra lygiagrečios:

$y = 2x - 5$ ir $y = 2x + \frac{7}{3}$.

Koeficientai prie x (krypčių koeficientai) yra vienodi, taigi abi tiesės tikrai lygiagrečios.

Pirmas būdas

Pirmoje tiesėje pasirinkime bet kurį tašką. Pavyzdžiui, pažvelgę į tiesės lygtį matome, kad taškas $A(3; 1)$ yra toje tiesėje. Parašykime tiesės, einančios per tašką A statmenai duotoms tiesėms, lygtį. Šios tiesės krypties koeficientas yra $\left(-\frac{1}{2}\right)$, nes statmenų tiesių krypčių koeficientų sandauga turi būti lygi (-1).

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3); \quad 2y + x = 5.$

Raskime šios tiesės ir tiesės $2y - 4x = 7$ sankirtos taško $B(x_B; y_B)$ koordinates:

$\begin{cases} 2y + x = 5, \\ 2y - 4x = 7; \end{cases}$ $\quad 5x = -2; \quad x_B = -0{,}4; \quad 2y_B = 5{,}4; \quad y_B = 2{,}7.$

Apskaičiuokime atstumą tarp taškų A ir B. Tai ir bus atstumas tarp lygiagrečiųjų tiesių:

$d = \sqrt{(-0{,}4 - 3)^2 + (2{,}7 - 1)^2} = \sqrt{14{,}45} \approx 3{,}8.$

Antras būdas

Parašykime tiesės, kuri eina per koordinačių pradžią statmenai duotoms tiesėms, lygtį:

$y = -\frac{1}{2}x.$

Raskime šios tiesės ir tiesės $2x - y = 5$ sankirtos taško $M(x_M; y_M)$ koordinates:

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ $\quad 2x + \frac{x}{2} = 5; \quad 5x_M = 10; \quad x_M = 2; \quad y_M = -1.$

Raskime tiesės $y = -\frac{1}{2}x$ ir tiesės $2y - 4x = 7$ sankirtos taško $N(x_N; y_N)$ koordinates:

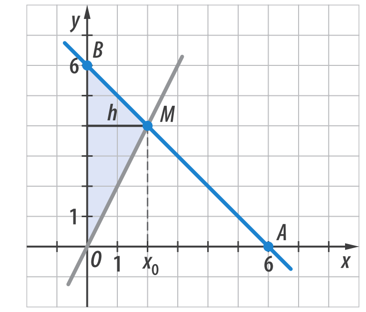
$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x, \\ 2y - 4x = 7; \end{cases}$ $\quad -x - 4x = 7; \quad 5x_N = -7; \quad x_N = -1{,}4; \quad y_N = 0{,}7.$

Apskaičiuokime atstumą tarp taškų M ir N. Tai ir bus atstumas tarp lygiagrečiųjų tiesių:

$d = \sqrt{(-1{,}4 - 2)^2 + (0{,}7 + 1)^2} = \sqrt{14{,}45} \approx 3{,}8.$

Atsakymas. 3,8.

4.
Kokia turi būti a reikšmė, kad tiesių $y = ax$, $x + y = 6$ ir ordinačių ašies ribojamos figūros plotas būtų lygus 6?



Matome, kad trikampio OMB aukštinės ilgis h turi būti lygus 2.
Vadinasi, duotųjų tiesių sankirtos taško abscisė turi būti lygi 2:

$\begin{cases} y = ax, \\ x + y = 6; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 2a, \\ a + y = 6; \end{cases}$ $\quad a + 2a = 6; \quad a = 2.$

Atsakymas. 2.

5.

Nubraižykite funkcijos $y = \frac{-3x^2 - 3x + 6}{x + 2}$ grafiką ir iš jo nustatykite, su kuriomis m ir b reikšmėmis:

1) tiesė $y = m$ neturi nė vieno bendro taško su nubraižytu grafiku;
2) tiesė $y = mx$ neturi nė vieno bendro taško su nubraižytu grafiku;
3) tiesė $y = mx + b$ neturi nė vieno bendro taško su nubraižytu grafiku.

Apskaičiuokime skaitiklio trinario šaknis:

$-3x^2 - 3x + 6 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12 \cdot 6}}{-6} = \frac{3 \pm 9}{-6}; \quad x_1 = -2, x_2 = 1.$

Vadinasi,

$y = \frac{-3(x + 2)(x - 1)}{x + 2}; \quad y = -3x + 3.$

(Galėjome skaitiklį iš vardiklio padalyti kampu, tiesa?)

Tik nepamirškime: $x \neq -2$!

Dabar grafiko galime ir nebraižyti – tai tiesė, einanti per tašką $(0; 3)$. Tačiau taške $Q(-2; 9)$ grafiko nėra! Tame taške pradinė funkcija neapibrėžta.

1) Tiesė $y = m$ yra lygiagreti su abscisių ašimi ir turi eiti per tašką, kuriame nėra pradinės funkcijos grafiko, todėl turi būti $m = 9$.
2) Tiesė $y = mx$ turi būti lygiagreti su tiese $y = -3x + 3$, todėl turi būti $m = -3$.
3) Tiesė $y = mx + b$ turi pataikyti pro „plyšį“ $Q(-2; 9)$, todėl turi būti taip: $9 = -2m + b$; $m = \frac{b - 9}{2}$.

Nepamirškime išimties! Negali būti $m = -3$, $b = 3$, nes tokiais atvejais gauname tiesę, sutampančią su tiese $y = -3x + 3$.

Uždaviniai

3.1.
Surašykite poromis šių tiesių lygtis: **a)** tarpusavyje lygiagrečių tiesių; **b)** tarpusavyje statmenų tiesių.

A $3x - y = 2$ **B** $y = 6x$ **C** $x + 3y = 0$ **D** $6y = -x - 1$ **E** $2y - 6x + 5 = 0$

3.2.
Duotos trys tiesės: $y = x$, $y = x - 2$, $x + y = 4$. Sudarykite lygtį tokios tiesės, kuri kartu su trimis duotomis tiesėmis ribotų figūrą, kurios plotas būtų lygus 16.

3.3.
Nenaudodami skaičiuotuvo apskaičiuokite kampo tarp tiesių $y = 2x + 5$ ir $3x + y = 1$ didumą.

3.4.
Duotos dvi tiesių lygtys: $2x - ay = 1$, $x + y = 5$. Kokia turi būti a reikšmė, kad tiesės būtų:
a) lygiagrečios; b) statmenos?

3.5.
Raskite tiesių $2y = x + 1$, $y = 5 - x$, $4y = 5 - x$ sankirtos taškus.

4 MODULIS

Ką reikia prisiminti?

Vienintelė žinia apie modulį:

$$|*| = \left[\begin{array}{l} *, \text{ kai } * \geqslant 0, \\ -*, \text{ kai } * < 0. \end{array}\right.$$

Būtina išvengti tipinės klaidos! Vietoj žvaigždutės atskiru atveju gali būti tiesiog x, bet jei čia būtume visur surašę ne $*$, o x, tai daugelis suprastų, kad, pavyzdžiui, nelygybėse VISADA turi būti x. Ne, turi būti ne x, o tai, kas tūno po modulio ženklu!

Panagrinėkite šiuos uždavinių sprendimus.

1.
Suprastinkite: $\dfrac{a^3 + a^2 - 2a}{a \cdot |a + 2| - a^2 + 4}$.

Nagrinėjame du atvejus.

1) $a < -2$: $\dfrac{a^3 + a^2 - 2a}{a \cdot |a + 2| - a^2 + 4} = \dfrac{a^3 + a^2 - 2a}{-a \cdot (a + 2) - a^2 + 4} = \dfrac{a^3 + a^2 - 2a}{-2a^2 - 2a + 4} = -\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2 + a - 2}{a^2 + a - 2} = -\dfrac{a}{2}$.

2) $a > -2$: $\dfrac{a^3 + a^2 - 2a}{a \cdot |a + 2| - a^2 + 4} = \dfrac{a^3 + a^2 - 2a}{a \cdot (a + 2) - a^2 + 4} = \dfrac{a \cdot (a^2 + a - 2)}{2a + 4} = \dfrac{a \cdot (a - 1)}{2}$.

Atsakymas. $-\frac{a}{2}$, kai $a < -2$; $\frac{a \cdot (a - 1)}{2}$, kai $a > -2$; reikšmė neapibrėžta, kai $a = -2$.

2.
Išspręskite lygtį $|x| + |x - 1| = 1$.

Nagrinėjame tris atvejus.

1) $x \geqslant 1$: $x + x - 1 = 1$; $2x = 2$; $x = 1$.
2) $0 \leqslant x < 1$: $x - x + 1 = 1$; $0 = 0$; tinka visos reikšmės iš intervalo $0 \leqslant x < 1$.
3) $x < 0$: $-x - x + 1 = 1$; $-2x = 0$; $x = 0$; $\varnothing$.

Atsakymas. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3.
Suprastinkite reiškinį $\left|\dfrac{|x - 2| + 4}{x - 2}\right| \cdot (x^2 - 4)$.

Komentarų nerašysime...

1) $x > 2$: $\left|\dfrac{x - 2 + 4}{x - 2}\right| \cdot (x^2 - 4) = \left|\dfrac{x + 2}{x - 2}\right| \cdot (x^2 - 4) = \dfrac{x + 2}{x - 2} \cdot (x + 2)(x - 2) = (x + 2)^2$.

2) $x < 2$: $\left|\dfrac{-x + 2 + 4}{x - 2}\right| \cdot (x^2 - 4) = \left|\dfrac{6 - x}{x - 2}\right| \cdot (x^2 - 4) = -\dfrac{6 - x}{x - 2} \cdot (x^2 - 4) = (x - 6)(x + 2) = x^2 - 4x - 12$.

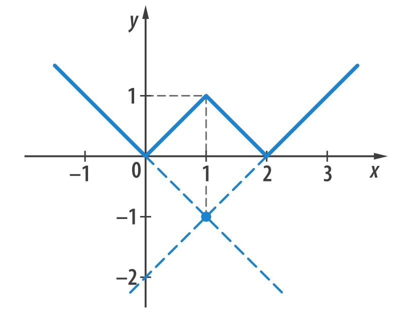
Atsakymas. $(x + 2)^2$, kai $x > 2$; $x^2 - 4x - 12$, kai $x < 2$.

4.
Nubraižykite funkcijos $y = ||x - 1| - 1|$ grafiką.

Nagrinėjame du atvejus.

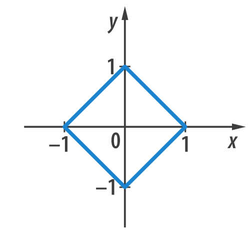
1) $x \geqslant 1$: $y = |x - 1 - 1|$; $y = |x - 2|$;
2) $x < 1$: $y = |-x + 1 - 1|$; $y = |-x|$.

Nubrėžiame dvi tieses: $y = x - 2$ ir $y = -x$. Neigiamas grafikų dalis pasukame apie Ox ašį 180° kampu. Paliekame tas grafikų dalis, kurios nurodytos nelygybėmis.



5.
Nubraižykite grafiką, atitinkantį lygybę $|y| = 1 - |x|$.

Žingsnis po žingsnio gausite grafiką, pavaizduotą dešinėje.



Uždaviniai

4.1.
Nubraižykite funkcijos $y = \dfrac{|x + 2|}{x + 2} \cdot x$ grafiką.

4.2.
Suprastinkite: $\dfrac{\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4} + 2}}{\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4} - 2}}$.

4.3.
Nubraižykite funkcijos $y = |x^2 + x| - 1$ grafiką.

4.4.
Nubraižykite funkcijos $y = |2 \sin x + 1|$ grafiką.

4.5.
Išspręskite nelygybę $|x^2 - 1| < x$.