LAIMA TYNČENKO
JELENA IGNATOVIČ
PETRĖ GREBENIČENKAITĖ

AUGINK SMEGENIS

SU MATEMATIKOS TEKSTINIAIS UŽDAVINIAIS 11–12 KLASEI

ŠVIESA

Leidinio vadovė
Ingrida Navalinskienė

Redaktorė
Audronė Puidokienė

Pirmasis leidimas 2020

Leidinio bibliografinė informacija pateikiama Lietuvos nacionalinės Martyno Mažvydo bibliotekos Nacionalinės bibliografijos duomenų banke (NBDB).

ISBN 978-5-430-07029-8

TURINYS

Abejok dėl visų tiesų, dėl visko abejok!

Sokratas

Šio leidinio tikslas – padėti 11–12 klasių mokiniams patiems išmokti spręsti tekstinius uždavinius. Leidinyje pateikiamų uždavinių įvairovė sudaro sąlygas susisteminti jau turimas žinias ir susipažinti su tais sprendimo būdais, kuriems mokykloje dažnai neskiriama pakankamai dėmesio. Tikime, kad ir be didesnės mokytojo pagalbos galima įgusti atidžiai nagrinėti tekstinių uždavinių sąlygas ir sėkmingai taikyti skirtingus sprendimo būdus.

• • •

Bet kurio tekstinio uždavinio sprendimas susideda iš trijų etapų:
1) tinkamo kintamųjų pasirinkimo;
2) lygčių sudarymo ir formalizavimo to, ką reikia rasti;
3) sudarytų lygčių ir nelygybių sistemos sprendimo.

Trumpai apžvelgsime, kas kiekviename etape būtų svarbu:

1. Spręsdami judėjimo uždavinius kintamuoju rinkitės atstumą, greitį, spręsdami darbo uždavinius – darbo našumą (jo vaidmuo toks pat kaip greičio judėjimo uždaviniuose). Jei uždaviniai susiję su mišiniais, lydiniais ar tirpalais, rekomenduojama kintamuoju pasirinkti arba visą mišinio, lydinio, tirpalo masę, arba jo tūrį, arba medžiagos koncentraciją $K = \frac{m}{M} \cdot 100$ % (čia M – mišinio, kuriame yra m masės vienetų tam tikros medžiagos, masė).
   Sprendžiant uždavinius su sveikaisiais nežinomaisiais, reikia prisiminti, jog tai, kad duotasis nežinomasis yra sveikasis skaičius, dažniausiai yra papildoma sąlyga, padedanti vienareikšmiškai pasirinkti reikiamą skaičių iš daugelio reikšmių, tenkinančių kitas uždavinio sąlygas.
   Spręsdami procentų uždavinius tiksliai apibrėžkite, ko yra 100 %. Didžiąją dalį šių uždavinių išspręsite sudarydami proporcijas.
   Atkreipkite dėmesį į matavimo vienetus. Sąlygoje tų pačių dydžių skaitinės reikšmės gali būti pateiktos skirtingais matavimo vienetais, o skaičiavimuose turite naudoti vienodus.
2. Tekstinių uždavinių teiginius paverskite lygtimis, nelygybėmis ir jų sistemomis. Atsirinkite kintamuosius, kuriuos būtina rasti, nes kintamųjų gali būti daugiau negu lygčių, todėl visų jų rasti neįmanoma ir nereikia.
3. Lygčių sistemas spręskite visą laiką galvodami apie tai, ką reikia rasti. Tekstiniuose uždaviniuose visi dydžiai teigiami, todėl sistemos lygtis ir nelygybes galite drąsiai dauginti, dalyti, kelti kvadratu.

• • •

Šiame leidinyje pateikiama medžiaga yra gana sudėtinga. Todėl ją reikėtų studijuoti su rašikliu rankoje, užsirašyti pastabas, tarpinius veiksmus. Bet pirma mėginkite uždavinius išspręsti patys, tik tada žiūrėkite, kaip išspręsta čia. Pateikti sprendimo būdai nebūtinai sutaps su Jūsų, bus trumpiausi ar originaliausi, nes mūsų siekis – supažindinti su įvairiomis sprendimo galimybėmis. Dauguma uždavinių atitinka matematikos valstybinio brandos egzamino programos reikalavimus ir yra panašūs į pateikiamus per matematikos egzaminą. Parinkome ir tokių, kurie pravestų ruošiantis konkursams, olimpiadoms. Viliamės, kad šis leidinys bus naudingas visiems!

Linkime sėkmės!

Autorės

PROCENTAI

1 **Mokyklos abiturientams buvo suorganizuota ekskursija į technikos muziejų. Peržiūrėjus užsirašiusiųjų į ekskursiją sąrašą paaiškėjo, kad mergaičių skaičius sudaro 25 % berniukų skaičiaus. Bet vieną mergaitę pakeitė berniukas ir todėl ekskursijoje dalyvavusių mergaičių skaičius sudarė 20 % berniukų skaičiaus. Kiek mergaičių ir kiek berniukų dalyvavo ekskursijoje?**

Sprendimas

Tegul m – mergaičių, užsirašiusių į ekskursiją, skaičius, b – berniukų, užsirašiusių į ekskursiją, skaičius. Remdamiesi sąlyga sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} m = 0{,}25b, & (1) \\ m - 1 = 0{,}2(b + 1). & (2) \end{cases}$$

Sprendžiame (2) lygtį:

$m - 1 = 0{,}2(b + 1)$, $\quad m - 1 = 0{,}2b + 0{,}2$, $\quad 0{,}25b - 1 = 0{,}2b + 0{,}2$, $\quad 0{,}05b = 1{,}2$, $\quad b = 24$.

Gautąją b reikšmę įrašome į (1) lygtį:

$m = 0{,}25 \cdot 24 = 6$, $\quad m - 1 = 5$, $\quad b + 1 = 25$. Atsakymas. 5 mergaitės ir 25 berniukai.

2 **Bilietas į pramogų parką kainavo 3 Eur. Jį atpiginus lankytojų skaičius padidėjo 50 %, o pramogų parko pajamos – 35 %. Kokia atpiginto bilieto kaina?**

Sprendimas

Tegul s – atpiginto bilieto kaina, n – lankytojų skaičius iki bilieto atpiginimo. Tada lankytojų skaičius atpiginus bilietą lygus $1{,}5n$, o pramogų parko pajamos – $1{,}5n \cdot s$. Šios pajamos yra 35 % didesnės nei $n \cdot 3$ (pajamas iki bilieto atpiginimo), taigi

$1{,}5n \cdot s = 1{,}35 \cdot n \cdot 3$, $\quad s = 2{,}7$. Atsakymas. 2,7 Eur.

3 **Šeimoje 4 žmonės: Marija, mama, tėtis ir senelis. Jei Marija gautų dvigubai didesnę stipendiją, tai bendrosios šeimos pajamos padidėtų 5 %. Jei padvigubėtų mamos atlyginimas, tai šeimos pajamos padidėtų 40 %, o jei padvigubėtų tėčio atlyginimas, tai šeimos pajamos padidėtų 35 %. Kiek procentų padidėtų šeimos pajamos, jei padvigubėtų senelio pensija?**

Sprendimas

1 būdas

Jei Marija gautų dvigubai didesnę stipendiją, šeimos pajamos padidėtų stipendijos dydžiu, taigi Marijos stipendija sudaro 5 % bendrų šeimos pajamų. Lygiai taip pat gauname, kad mamos atlyginimas sudaro 40 % šeimos pajamų, tėčio – 35 %. Senelio pensija sudaro likusią dalį šeimos pajamų, t. y. 100 % – 5% – 40 % – 35 % = 20 %. Taigi tiek procentų padidėtų šeimos pajamos jo pensijai padvigubėjus.

2 būdas

Kiekvieno šeimos nario pajamoms padvigubėjus bendrosios šeimos pajamos padidėtų 100 %, vadinasi, senelio pensija sudaro 100 % – 5 % – 40 % – 35 % = 20% šeimos pajamų.

Atsakymas. 20%.

4 **Ugnė žino, kad norint išreikšti masės vienetus svarus kilogramais reikia svarų skaičių padalyti iš 2 ir gautą rezultatą sumažinti 10 %. Ugnė padarė išvadą, kad norint išreikšti kilogramus svarais reikia kilogramų skaičių padauginti iš 2, o gautą rezultatą padidinti 10 %. Keliais procentais suklystų Ugnė taip išreikšdama kilogramus svarais?**

Sprendimas

Tegul x – masė svarais, y – masė kilogramais.

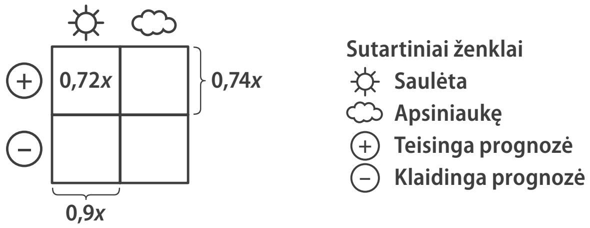
$y = \frac{x}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}45x$, $\quad 0{,}45x \cdot 2 \cdot 1{,}1 = 0{,}99x$, $\quad x - 0{,}99x = 0{,}01x$.

Taigi Ugnė gautų 1 % mažesnę, nei yra iš tikrųjų, masės reikšmę. Atsakymas. 1 %.

5 **Orų stebėjimo laikotarpiu 90 % visų dienų buvo saulėtos. Sinoptikų prognozės pasitvirtino 74 dienomis iš 100, be to, jie teisingai prognozavo 80 % saulėtų dienų. Kiek procentų visų apsiniaukusių dienų teisingai prognozavo sinoptikai?**

Sprendimas

Visas stebėjimo laikotarpio dienas suskirstysime į keturias grupes ir pavaizduosime tokia schema:



Tarkime, orai buvo stebėti x dienų. Saulėtų buvo $0{,}9x$ dienų, iš jų sinoptikai teisingai prognozavo $0{,}8 \cdot 0{,}9x = 0{,}72x$ dienų. Iš viso jie teisingai prognozavo $0{,}74x$ dienų orus.
Taigi gauname, kad jie teisingai prognozavo $0{,}74x - 0{,}72x = 0{,}02x$ apsiniaukusių dienų. Iš viso apsiniaukusių dienų buvo $x - 0{,}9x = 0{,}1x$, vadinasi, sinoptikai teisingai prognozavo $\frac{0{,}02x}{0{,}1x} \cdot 100\ \% = 20\ \%$ tokių dienų.

Atsakymas. 20 %.

6 **Geologijos fakultetą sudaro du skyriai: geologijos ir geofizikos. Po I kurso 10 % geofizikų perėjo į geologijos skyrių ir geofizikos skyriuje liko 36 % visų buvusių šio fakulteto I kurso studentų (dabartinių antrakursių). Kiek procentų daugiau studentų mokosi geologijos skyriuje II kurse nei jų mokėsi šiame skyriuje I kurse?**

Sprendimas

Tegul g – geologijos skyriaus I kurso studentų skaičius, f – geofizikos skyriaus I kurso studentų skaičius, $g + f$ – bendras geologijos fakulteto I kurso studentų skaičius.
Po I kurso į geologijos skyrių perėjo mokytis $0{,}1f$ geofizikos studentų.

$$0{,}9f = 0{,}36(g + f), \quad 3f = 2g, \quad f = \tfrac{2}{3}g, \quad 0{,}1f = \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{2}{3}g = \tfrac{2}{30}g.$$

Sudarome proporciją ir apskaičiuojame geologijos skyriaus studentų skaičiaus padidėjimą procentais:

$$\begin{aligned} g &- 100\ \%, \\ \tfrac{2}{30}g &- p; \end{aligned} \qquad p = \tfrac{2}{30} \cdot 100 = \tfrac{20}{3}\ \% = 6\tfrac{2}{3}\ \%.$$

Atsakymas. $6\frac{2}{3}$ %.

7 **Du verslininkai už tą pačią kainą įsigijo po tiek pat prekių. Pirmasis šias prekes pardavė dvigubai brangiau nei pirko. Antrasis iš pradžių jas pardavinėjo 60 % didesne kaina nei pirko, bet, pardavęs ketvirtadalį, kainą padidino dar 40 % ir už ją pardavė visas likusias prekes. Katro verslininko pelnas didesnis?**

Sprendimas

Tarkime, kad kiekvienas verslininkas pirko prekių už x eurų.
Tada pirmojo verslininko pelnas yra x eurų. Antrasis verslininkas už visas prekes būtų gavęs $1{,}6x$ eurų, bet už pradinę kainą pardavė tik ketvirtadalį prekių ir už jas pelnė $0{,}4x$ eurų. Likusias, dar 40 % pabrangintas, prekes jis pardavė už $1{,}4 \cdot 1{,}6 \cdot \frac{3}{4}x = 1{,}4 \cdot 1{,}2x = 1{,}68x$ eurų. Taigi iš viso už prekes gavo $0{,}4x + 1{,}68x = 2{,}08x$ eurų. Palyginame abiejų verslininkų pelnus: antrojo pelnas $2{,}08x - x = 1{,}08x$ eurų didesnis.

Atsakymas. Didesnis antrojo verslininko pelnas.

8 **Kiek mažiausiai mokinių galėtų būti klasėje, jei iš jų puikiai mokosi 12 %?**

Sprendimas

Tegul n – klasės mokinių skaičius, p – puikiai besimokančių mokinių skaičius.

Sudarome proporciją: $\begin{aligned} p &- 12\ \%, \\ n &- 100\ \%. \end{aligned}$ Iš čia $100 \cdot p = 12 \cdot n$, $\quad n = \frac{100 \cdot p}{12} = \frac{25 \cdot p}{3}$.

25 ir 3 yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Vadinasi, p turi būti dalus iš 3. Mažiausias toks $p = 3$.
Jei $p = 3$, tai $n = 25$. Atsakymas. 25 mokiniai.

9 **Mindaugas turi pinigų 30 pieštukų nusipirkti. Nuėjęs į parduotuvę pamatė, kad vyksta akcija: perkant 5 pieštukus taikoma 10 % nuolaida, o perkant 20 pieštukų – 25 % nuolaida. Apskaičiuokite, kiek daugiausia pieštukų galėtų nusipirkti Mindaugas už turimus pinigus.**

Sprendimas

Atkreipiame dėmesį, kad 25 % 20-ies pieštukų kainos yra 5 pieštukų kaina, o 10 % 5-ių pieštukų kainos yra pusė pieštuko kainos. Pirmiausia Mindaugui vertėtų pirkti 20 pieštukų, kad gautų 5 pieštukų kainos dydžio nuolaidą. Tuomet jis turės pinigų 15 pieštukų nusipirkti ir, jei pirks 3 kartus po 5 pieštukus, jam liks tiek pinigų, kiek kainuotų 1,5 pieštuko. Už šiuos pinigus Mindaugas galėtų nusipirkti 1 pieštuką.

Iš viso: $20 + 3 \cdot 5 + 1 = 36$ (piešt.) Atsakymas. 36 pieštukus.

10 **Kiek mažiausiai mokinių galėtų lankyti matematikos būrelį, jei žinoma, kad jį lanko mažiau nei 50 %, bet daugiau nei 40 % berniukų?**

Sprendimas

Tegul n – būrelį lankančių mokinių skaičius, b – būrelį lankančių berniukų skaičius.
Iš sąlygos žinome, kad $0{,}4n < b < 0{,}5n$. Reikia rasti mažiausią sveikąjį n, kai b – sveikasis skaičius.
Parenkame skirtingas n reikšmes, pvz.:

$n = 5$, gauname, kad $2 < b < 2{,}5$; ši n reikšmė netinka, nes intervale nėra sveikųjų skaičių;

$n = 7$, gauname, kad $2{,}8 < b < 3{,}5$; ši n reikšmė tinka, nes $b = 3$.

Atsakymas. 7 mokiniai.

11 **Mažiau nei 93,5 %, bet daugiau nei 92,5 % brigados darbininkų pagamino daugiau detalių, nei planavo. Raskite mažiausią galimą brigados darbininkų skaičių.**

Sprendimas

1 būdas

Tegul n – plano neviršijusių brigados darbininkų skaičius, N – visos brigados darbininkų skaičius.
Apskaičiuojame didžiausią ir mažiausią galimą plano neviršijusių darbininkų skaičių procentais:

$100\ \% - 92{,}5\ \% = 7{,}5\ \%$,

$100\ \% - 93{,}5\ \% = 6{,}5\ \%$.

Tada $\frac{6{,}5}{100}N < n < \frac{7{,}5}{100}N$.

Taikome nelygybių savybę: kai $a < b$ ir $a, b > 0$, tai $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$:

$\frac{100}{7{,}5N} < \frac{1}{n} < \frac{100}{6{,}5N}$, $\quad 13\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{N} < \frac{1}{n} < 16\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{N} \ \Big| \cdot nN$, $\quad 13\frac{1}{3}n < N < 16\frac{2}{3}n$.

Kai $n = 1$ (mažiausias natūralusis skaičius), tai $N = 14$ (mažiausias galimas visos brigados darbininkų skaičius).

2 būdas

Tegul K (%) – plano neviršijusių brigados darbininkų dalis; $6{,}5 \leqslant K \leqslant 7{,}5$. Jei plano neviršijo mažiausiai 1 žmogus, tada mažiausias galimas visos brigados darbininkų skaičius yra N.

Sudarome proporciją: $\begin{array}{l} 7{,}5\ \% - 1 \text{ žm.,} \\ 100\% - N \text{ žm.} \end{array}$ Iš čia $N = \frac{100}{7{,}5} = 13\frac{1}{3}$.

Taigi mažiausias galimas darbininkų skaičius $N = 14$.

Atsakymas. 14 darbininkų.

12 **Puikiai mokosi mažiau nei 3,1 %, bet daugiau nei 2,9 % klasės mokinių. Kiek mažiausiai mokinių mokosi šioje klasėje?**

Sprendimas

Tegul n (%) – puikiai besimokančių mokinių dalis, N – klasės mokinių skaičius.

$2{,}9 \leqslant n \leqslant 3{,}1$.

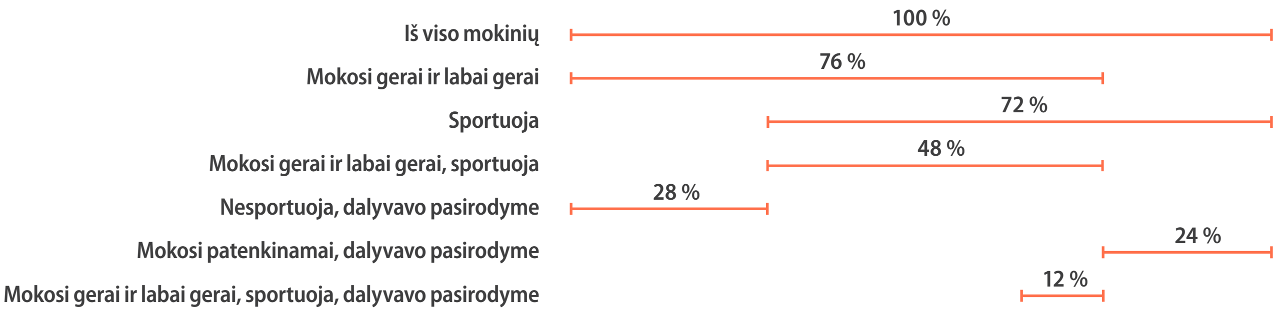
Jei klasėje puikiai mokosi mažiausiai 1 mokinys, tai mažiausias galimas klasės mokinių skaičius

$N = 1 \cdot \frac{100}{3{,}1} \approx 32{,}3$. Atsakymas. 33 mokiniai.

13 **Iš 100 mokinių 76 % mokosi gerai ir labai gerai, 72 % sportuoja ir 64 % dalyvavo pasirodyme. Kiek mažiausiai pasirodyme dalyvavo gerai ir labai gerai besimokančių sportuojančių mokinių?**

Sprendimas

1 būdas (scheminis)



Mokosi gerai ir labai gerai, sportuoja 76 % + 72 % – 100 % = 48 % mokinių.
Dalyvavo pasirodyme, bet mokosi patenkinamai arba nesportuoja 28 % + 24 % = 52 % mokinių.
Sportuoja, mokosi gerai ir labai gerai, dalyvavo pasirodyme 64 % – 52 % = 12 % mokinių.

2 būdas

Patenkinamai mokosi 24 % mokinių, nesportuoja 28 % mokinių, pasirodyme nedalyvavo 36 % mokinių.
Mokosi patenkinamai, nesportuoja ir nedalyvavo pasirodyme 24 % + 38 % +36 % = 88 % mokinių.
Sportuoja, mokosi gerai ir labai gerai, dalyvavo pasirodyme 100 % – 88 % = 12 % mokinių.

Atsakymas. 12 mokinių.

14 **Per II pusmetį pažangą padarė mažiau nei 97,1 %, bet daugiau nei 96,9 % klasės mokinių. Kiek mažiausiai mokinių mokosi šioje klasėje?**

Sprendimas

Tegul N – klasės mokinių skaičius, x – pažangos nepadariusių mokinių skaičius.

$$\frac{2{,}9}{100}N < x < \frac{3{,}1}{100}N, \qquad \frac{100}{3{,}1N} < \frac{1}{x} < \frac{100}{2{,}9N} \;\Big|\cdot Nx > 0, \qquad \frac{100}{3{,}1}x < N < \frac{100}{2{,}9}x, \qquad 32\frac{8}{31}x < N < 34\frac{14}{29}x.$$

Mažiausias galimas pažangos nepadariusių mokinių skaičius $x = 1$, todėl mažiausias galimas mokinių skaičius klasėje yra 33. Atsakymas. 33 mokiniai.

15 **Pirmą dieną Elena pririnko 25 % mažiau grybų nei Linas, o antrą – 20 % už jį daugiau. Per abi šias dienas Elena pririnko 10 % daugiau grybų nei Linas. Kiek mažiausiai grybų jie galėjo pririnkti abu kartu?**

Sprendimas

Pirmą dieną Elenos pririnktų grybų skaičius yra lygus $\frac{3}{4}$ Lino grybų skaičiaus, o antrą dieną – $\frac{6}{5}$ Lino grybų skaičiaus.
Tarkime, pirmą dieną Linas pririnko $4x$, antrą – $5y$ grybų, tada Elena atitinkamai bus pririnkusi $3x$ ir $6y$ grybų. Pagal uždavinio sąlygą

$$3x + 6y = \frac{11}{10}(4x+5y), \qquad 10(3x + 6y) = 11(4x + 5y), \qquad 14x = 5y.$$

Iš šios lygybės matome, kad x kartotinis yra 5, o y kartotinis – 14. Taigi mažiausi natūralieji skaičiai, su kuriais lygybė teisinga, yra: $x = 5$, $y = 14$. Tada bendras grybų skaičius $\frac{21}{10}(4x + 5y) = 189$.

Atsakymas. 189 grybus.

16 **Gatvės praeiviai buvo apklausiami, kur jie norėtų atostogauti. Dauguma atsakė, kad kalnuose, du – kad nežino, o visi kiti – kad prie jūros. Uždavus patikslinamuosius klausimus paaiškėjo, kad 81,25 % nurodžiusiųjų kalnus rinktųsi Alpes, 12,5 % – Karpatus, o vienas praeivis važiuotų į Himalajus. 90 % nurodžiusiųjų jūrą rinktųsi atostogas prie Baltijos jūros, o 10 % – prie Viduržemio. Kiek praeivių buvo apklausta?**

Sprendimas

Tegul kalnus nurodė x praeivių, jūrą – y praeivių.
Pirmiausia randame, kokią kalnus nurodžiusių praeivių dalį sudaro praeiviai, pasirinkę Alpes ir Karpatus, ir kokią – praeivis, pasirinkęs Himalajus:

$81{,}25\ \% + 12{,}5\ \% = 93{,}75\ \%,$

$100\ \% - 93{,}75\ \% = 6{,}25\ \%\ .$

Sudarome proporciją: $\begin{matrix} 1 - 6{,}25\ \%, \\ x - 100\ \%. \end{matrix}$ Iš čia $x = 16$.

Pagal sąlygą $y < 16$, $0{,}9y + 0{,}1y < 16$, $\frac{9y}{10} + \frac{y}{10} < 16$.

Kadangi y yra natūralusis skaičius, dalus iš 10 ir mažesnis už 16, tai jis lygus 10.
Suskaičiuojame apklaustus praeivius:

$16 + 10 + 2 = 28.$ Atsakymas. 28 praeiviai.

17 **2018 metais miestelio gyventojų skaičius padidėjo n žmonių, arba 300 %, 2019 – 300 žmonių, arba n %. Kiek žmonių gyveno miestelyje 2019 metų pabaigoje, jei jų skaičius daugiau nepakito?**

Sprendimas

Tegul x – gyventojų skaičius 2018 metų pradžioje.
Tada gyventojų skaičius 2018 metais: $x + n = x + \frac{300}{100}x = 4x$, $n = 3x$.

Gyventojų skaičius 2019 metais: $4x + 300 = 4x + \frac{n}{100} \cdot 4x$, $300 = \frac{4nx}{100}$.

Iš čia $300 = \frac{4 \cdot 3x \cdot x}{100}$, $4x^2 = 10\,000$, $x = 50$.

Vadinasi, 2019 metų pabaigoje miestelyje gyveno $(4 \cdot 50 + 300) = 500$ žmonių. Atsakymas. 500 žmonių.

18 **Kad paruoštų žiemai šieno, ūkininkas tris kartus kas savaitę šienavo pievą. Derliaus (nušienautos žolės) masė kaskart būdavo tokia pati. Po trijų šienavimų pievoje augančios žolės masė sumažėjo 78,3 %, palyginti su jos mase, kuri buvo prieš šienavimą. Apskaičiuokite, kiek procentų derliaus masė sudarė pradinės pievoje augusios žolės masės, jei savaitinis žolės prieaugis sudaro 10 %.**

Sprendimas

Tegul a – žolės pievoje masė prieš pirmąjį šienavimą, x – vieno derliaus (per vieną šienavimą nušienautos žolės) masė, $3x$ – trijų derlių masė.
Apskaičiuojame, kiek kartų padidėja žolės pievoje masė per savaitę: $\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1{,}1$.
Tada žolės pievoje masė po trijų šienavimų yra $((a - x)1{,}1 - x)1{,}1 - x$.
Pagal sąlygą po trijų šienavimų žolės pievoje masė $(1 - 0{,}783)a = 0{,}217a$.
Vadinasi, $((a - x)1{,}1 - x)1{,}1 - x = 0{,}217a$, $1{,}1^2a - 1{,}1^2x - 1{,}1x - x = 0{,}217a$.

Iš čia vieno derliaus masė $x = \frac{1{,}1^2 - 0{,}217}{1{,}1^2 + 1{,}1 + 1} \cdot a = \frac{0{,}993}{3{,}31}a = 0{,}3a$.

Tada trijų derlių masė $3x = 3 \cdot 0{,}3a = 0{,}9a$.
Apskaičiuojame, kiek procentų ji sudarė pradinės pievoje augusios žolės masės:

$\frac{3x}{a} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}9a}{a} \cdot 100\ \% = 90\ \%.$ Atsakymas. 90 %.

19 **Bendrovės A ir B stato namus. Jei bendrovės A darbo našumas būtų 50 % didesnis, o bendrovės B – 10 % mažesnis, negu dabar yra, jos kartu per 80 dienų pastatytų 38 namus. O jei atvirkščiai, bendrovės A darbo našumas būtų 10 % mažesnis, bendrovės B – 50 % didesnis, negu dabar yra, tai jos kartu per 120 dienų pastatytų 63 namus. Kiek namų jos kartu pastatytų per 24 dienas esant dabartiniam darbo našumui?**

Sprendimas

Tegul x ir y – atitinkamai bendrovių A ir B vienos dienos darbo našumas. Tada pagal sąlygą:

$$\begin{cases} (1{,}5x + 0{,}9y) \cdot 80 = 38 \ \big|: 80, \\ (0{,}9x + 1{,}5y) \cdot 120 = 63 \ \big|: 120, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}5x + 0{,}9y = \frac{19}{40}, & (1) \\ 0{,}9x + 1{,}5y = \frac{21}{40}. & (2) \end{cases}$$

(1) + (2): $2{,}4x + 2{,}4y = 1 \ \big| \cdot 10$, $24x + 24y = 10$, $(x + y) \cdot 24 = 10$. Atsakymas. 10 namų.

20 **Bananų respublikoje vyko parlamento rinkimai, kuriuose dalyvavo visi pilnamečiai respublikos piliečiai. Visi, kurie balsavo už „Mandarinų“ partiją, mėgsta mandarinus. Iš balsavusių už kitas partijas 90 % nemėgsta mandarinų. Kiek procentų balsų surinko „Mandarinų“ partija per šiuos rinkimus, jei mandarinus mėgsta 46 % pilnamečių piliečių?**

Sprendimas

▶ Tegul n – respublikos pilnamečių piliečių skaičius, m – už „Mandarinų“ partiją balsavusių piliečių skaičius. Tada $0{,}46n$ – mandarinus mėgstančių piliečių skaičius. Tačiau remdamiesi sąlyga galime užrašyti, kad mandarinus mėgsta $(m + 0{,}1(n - m))$ piliečių. Vadinasi,

$$m + 0{,}1(n - m) = 0{,}46n, \quad m + 0{,}1n - 0{,}1m = 0{,}46n, \quad 0{,}9m = 0{,}36n, \quad \frac{m}{n} = \frac{0{,}36}{0{,}9} = 0{,}4.$$

Kitaip tariant, už „Mandarinų“ partiją balsavo 40 % respublikos pilnamečių piliečių.

Atsakymas. 40 %.

21 **Mokykloje yra dvi dvyliktos klasės. 12A klasėje labai gerai mokosi 20 % mokinių, 12B klasėje – 10 % mokinių. Iš viso labai gerai mokosi 16 % dvyliktokų. Jei 12A klasėje mokosi 10 mokinių daugiau nei 12B klasėje, tai kiek mokykloje yra dvyliktokų?**

Sprendimas

▶ Tegul a – 12A klasės mokinių skaičius, b – 12B klasės mokinių skaičius. Tada labai gerai mokosi $0{,}2a$ 12A klasės mokinių ir $0{,}1b$ 12B klasės mokinių, iš viso 12A ir 12B klasėse yra $(a + b)$ mokinių, iš jų labai gerai mokosi $0{,}16(a + b)$ mokinių.

$$\begin{cases} 0{,}16(a + b) = 0{,}2a + 0{,}1b, \\ a = b + 10, \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}06b = 0{,}04a, \\ a = b + 10, \end{cases} \quad \begin{cases} 3b = 2a, \\ 1{,}5b = b + 10, \end{cases} \quad 0{,}5b = 10, \quad b = 20.$$

$a = b + 10 = 30$, $a + b = 50$. Atsakymas. 50 mokinių.

22 **Į banką, kuris moka 2 % palūkanų, verslininkas padėjo 1 000 000 Eur. Pirmus trejus metus verslininkas metų pabaigoje pasiimdavo iš banko tokią pat sumą. Ketvirtų metų pabaigoje paaiškėjo, kad indėlio suma, priskaičiavus palūkanas, yra 1 051 216,08 Eur. Kokią pinigų sumą kiekvienais metais verslininkas paimdavo iš banko?**

Sprendimas

▶ Tegul x – pinigų suma, kurią verslininkas kiekvienais metais paimdavo iš banko. Tada

$$(((1\,000\,000 \cdot 1{,}02 - x) \cdot 1{,}02 - x) \cdot 1{,}02 - x) \cdot 1{,}02 = 1\,051\,216{,}08,$$

$$1{,}02^4 \cdot 1\,000\,000 - 1{,}02^3 \cdot x - 1{,}02^2 \cdot x - 1{,}02 \cdot x = 1\,051\,216{,}08,$$

$3{,}121608x = 31\,216{,}08$, $x = 10\,000$. Atsakymas. 10 000 Eur.

23 **Trys mokslininkai už savo išradimą gavo 1410 tūkstančių eurų premiją. Antrasis mokslininkas gavo premiją, lygią $33\frac{1}{3}$ % pirmojo mokslininko premijos ir 60 tūkstančių eurų sumai, o trečiasis – premiją, lygią $33\frac{1}{3}$ % antrojo mokslininko premijos ir 30 tūkstančių eurų sumai. Kokią piniginę premiją gavo kiekvienas mokslininkas?**

Sprendimas

▶ Tarkime, pirmasis mokslininkas gavo x tūkstančių eurų premiją.

Tada antrasis mokslininkas gavo $\left(\frac{x}{3} + 60\right)$ tūkstančių eurų premiją, o trečiasis – $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 60\right) + 30\right)$ tūkstančių eurų premiją.

$$x + \frac{x}{3} + 60 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 60\right) + 30 = 1410, \quad x = 900.$$

Tada $\frac{x}{3} + 60 = \frac{900}{3} + 60 = 360$, $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 60\right) + 30 = \frac{1}{3} \cdot 360 + 30 = 150$.

Atsakymas. Pirmasis mokslininkas gavo 900 tūkst. eurų, antrasis – 360 tūkst. eurų, trečiasis – 150 tūkst. eurų.

24 **Ūkininkas iš banko pasiėmė paskolą su tam tikra metinių palūkanų norma. Po metų ūkininkas grąžino $\frac{1}{12}$ sumos, kurią tuo metu buvo skolingas, o dar po metų – visą likusią paskolos dalį su priskaičiuotomis palūkanomis ir ši suma buvo 6,92 % didesnė už paskolą. Kokia palūkanų norma šiame banke?**

Sprendimas

Tegul S – paskolos suma, x (%) – metinė palūkanų norma.
Tada po metų ūkininkas grąžino $\frac{1}{12}S\left(1+\frac{x}{100}\right)$ eurų ir liko skolingas $\frac{11}{12}S\left(1+\frac{x}{100}\right)$ eurų, o dar po metų grąžino $1{,}0692S$ eurų, o buvo skolingas $\frac{11}{12}S\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ eurų. Todėl

$$1{,}0692S = \frac{11}{12}S\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 \;\Big|\cdot\frac{12}{11S},\quad 1{,}1664=\left(1+\frac{x}{100}\right)^2,\quad 1{,}08^2=\left(1+\frac{x}{100}\right)^2,\quad 1+\frac{x}{100}=1{,}08,\quad x=8.$$

Atsakymas. 8 %.

25 **Įmonės techninė rekonstrukcija vyko keturiais etapais, kiekvienas truko sveikąjį skaičių mėnesių. Dėl rekonstrukcijos gamybos apimtis per pirmąjį etapą kas mėnesį mažėjo 4 %, per antrąjį – $6\frac{2}{3}$ %, per trečiąjį – $6\frac{1}{4}$ %, per ketvirtąjį – $14\frac{2}{7}$ %. Per visą rekonstrukcijos laikotarpį gamybos apimtis sumažėjo 37 %. Kiek mėnesių truko įmonės rekonstrukcija?**

Sprendimas

Tegul etapai truko atitinkamai m, n, k ir p mėnesių, o gamybos apimtis prieš rekonstrukciją buvo S_0. Tada gamybos apimtis rekonstrukcijos pabaigoje sudarė:

$$S_0\left(1-\frac{4}{100}\right)^m\cdot\left(1-\frac{6\frac{2}{3}}{100}\right)^n\cdot\left(1-\frac{6\frac{1}{4}}{100}\right)^k\cdot\left(1-\frac{14\frac{2}{7}}{100}\right)^p=S_0\left(\frac{24}{25}\right)^m\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^n\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^k\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^p.$$

Iš sąlygos žinome, kad gamybos apimtis rekonstrukcijos pabaigoje buvo $S_0\left(1-\frac{37}{100}\right)=S_0\frac{63}{100}$.
Todėl galime užrašyti, kad

$$S_0\left(\frac{24}{25}\right)^m\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^n\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^k\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^p=S_0\frac{63}{100}.$$

Abi lygybes puses padalijame iš S_0 ir skaičius išskaidome pirminiais daugikliais. Pritaikę laipsnių savybes gauname:

$$\left(\frac{3\cdot2^3}{5^2}\right)^m\cdot\left(\frac{2\cdot7}{3\cdot5}\right)^n\cdot\left(\frac{3\cdot5}{2^4}\right)^k\cdot\left(\frac{2\cdot3}{7}\right)^p=\frac{7\cdot3^2}{2^2\cdot5^2},\text{ arba } 2^{3m+n-4k+p}\cdot3^{m-n+k+p}\cdot5^{-2m-n+k}\cdot7^{n-p}=2^{-2}\cdot3^2\cdot5^{-2}\cdot7.$$

Sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases}3m+n-4k+p=-2, & m=1,\\ m-n+k+p=2, & n=2,\\ -2m-n+k=-2, & k=2,\\ n-p=1, & p=1.\end{cases}$$

$m+n+k+p=6.$ Atsakymas. 6 mėnesius.

26 **Bankas metų I ketvirčio pabaigoje už indėlį moka r_1 % palūkanų, o II ketvirčio pabaigoje – r_2 % palūkanų. Be to, skaičiuodamas palūkanas taiko formulę r_1 % + r_2 % = 5 %. Verslininkas metų I ketvirčio pradžioje padėjo į banką tam tikrą sumą, bet dvidešimt penktąją dalį jos pasiėmė to ketvirčio pabaigoje. Kokia galėtų būti r_1 reikšmė, kad II ketvirčio pabaigoje pinigų suma verslininko sąskaitoje būtų didžiausia?**

Sprendimas

Tegul S – suma, kurią verslininkas padėjo į banką I ketvirčio pradžioje.
Tada II ketvirčio pabaigoje jo turima pinigų suma bus $\left(S\left(1+\frac{r_1}{100}\right)-\frac{S}{25}\right)\cdot\left(1+\frac{r_2}{100}\right)$. Kadangi $r_2=5-r_1$, todėl šią pinigų sumą galime užrašyti šitaip:

$$\left(S\left(1+\frac{r_1}{100}\right)-\frac{S}{25}\right)\cdot\left(1+\frac{5-r_1}{100}\right)=S\left(\frac{24}{25}+\frac{r_1}{100}\right)\left(\frac{105}{100}-\frac{r_1}{100}\right)=S\left(\frac{96+r_1}{100}\cdot\frac{105-r_1}{100}\right)=S\cdot\frac{-r_1^2+9r_1+10\,080}{10\,000}.$$

Panagrinėkime kvadratinį trinarį $-x^2+9x+10\,080$. Jo grafikas yra parabolė ir ji didžiausią reikšmę įgyja viršūnės taške $x_V=\frac{-9}{2\cdot(-1)}=4{,}5$.
Vadinasi, gautasis reiškinys įgyja didžiausią reikšmę, kai $r_1=4{,}5$. Atsakymas. $r_1=4{,}5$ %.

27 **Kompote plūduriuoja slyvos ir abrikosai. Slyvos sudarė 40 % šių vaisių, bet Vytukas keletą slyvų suvalgė ir dabar jos sudaro 20 % kompote likusių vaisių. Kiek procentų slyvų suvalgė Vytukas?**

Tegul s – slyvų skaičius, a – abrikosų skaičius.

$$s=0{,}4(a+s),\quad 0{,}6s=0{,}4a,\quad a=\frac{3}{2}s.$$